This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

600015175P

SAGGIO

DI

ARITMETICA NON DECIMALE

CON APPLICAZIONI

DEL

CALCOLO DUODECIMALE E TRIGESIMALE

E

PROBLEMI SUI NUMERI COMPLESSI.

MONOGRAFIA

DI

VITTORIO GRÜNWALD.

VERONA,
LIBRERIA H. F. MUNSTER
(G. GOLDSCHMID SUCC.)
1881.

Prezzo Lire it. 4.—

SAGGIO

DI

ARITMETICA NON DECIMALE

CON APPLICAZIONI

DEL

CALCOLO DUODECIMALE E TRIGESIMALE

A

PROBLEMI SUI NUMERI COMPLESSI.

MONOGRAFIA

DI

VITTORIO GRÜNWALD.

BODLEIAN LIBRARY
28JAN85
OXFORD.

VERONA.
LIBRERIA H. F. MÜNSTER
(G. GOLDSCHAGG SUCC.).
1884.

PROPRIETÀ LETTERARIA.

STAMPERIA WAGNER IN INNSBRUCK.

Prefazione.

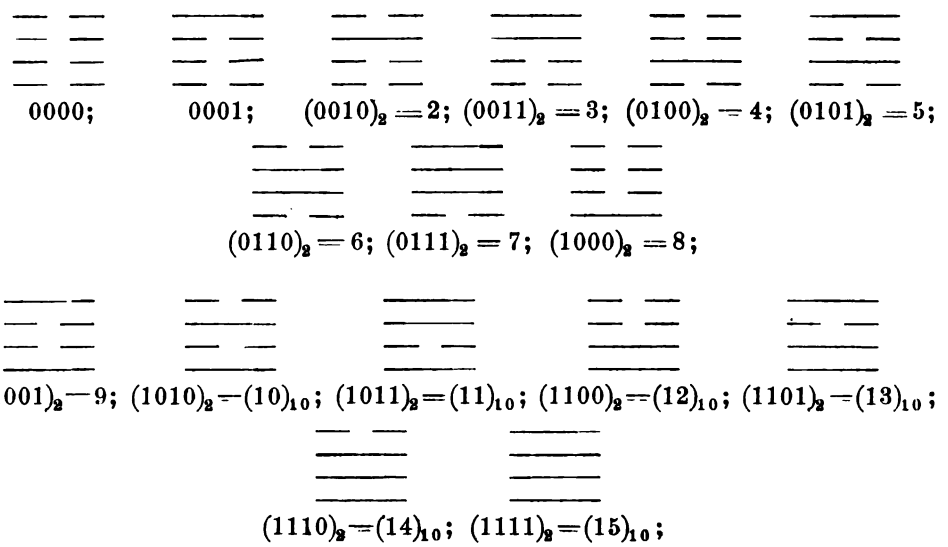
Il sistema ordinario di numerazione è quello a base dieci; esso si è talmente propagato per ogni dove, che presentemente è l'unico sistema numerico in uso Ciò non toglie che la scelta del medesimo sia affatto arbitraria, senza esser punto giustificata da eventuali vantaggi che esso per avventura potesse offrire in confronto ad altri sistemi numerici; chè il sistema duodecimale per esempio sarebbe ad esso di gran lunga preferibile per più ragioni, che nel corso del presente lavoro saranno a loro luogo enunciate.

Il sistema numerico decimale trae evidentemente le sue origini dal numero delle dita delle mani; il qual numero trasse gli uomini, dirò così, istintivamente a contare per decine; perciò tale conteggio è anche detto: „dactilonomia", ma anche ammessa tale origine il sistema prescelto non è per questo meno arbitrario; chè dalla medesima origine potevano nascere il sistema quinario (a base cinque, corrispondente al numero delle dita d'una sola mano) ed il sistema vigesimale (a base venti, corrispondente al numero complessivo delle dita tra mani e piedi); sistemi, i quali sono od erano effettivamente in uso presso alcune nazioni. È noto che p. es. nell'idioma francese si trovano ancora tracce del contare per ventine nel „quatre-vingt".

La più piccola base che si possa scegliere per un sistema numerico è evidentemente il numero due, colla qual base si ottiene il così detto sistema „binario" di numerazione. Sono grandi i vantaggi che risulterebbero dal calcolo con numeri scritti in questa base; chè qualunque operazione si ridurrebbe unicamente ad operare sui numeri **0**, ed **1**, che sono le sole cifre di questo sistema; se non chè tali vantaggi si rendono quasi illusorî in causa del gravissimo inconveniente prodotto dal dover scrivere con un numero molto grande di cifre un numero anche relativamente piccolo. — Tuttavia Leibnitz nella sua „Aritmetica binaria" dimostrò, che il sistema binario interesserebbe moltissimo in teoria, inquantochè col suo mezzo si faciliterebbero di molto certe ricerche teoriche, e per dare un solo esempio delle importanti applicazioni teoriche cui tale sistema è suscettibile, citerò le *tavole dei logaritmi binari*

dei numeri naturali; che trovano un'immediata applicazione nell'acustica e precisamente nella teoria degli intervalli musicali. Una tavola simile si trova estesa dai numeri **1** a **320** in „Montferrier, Dictionnaire des sciences mathématiques" Tomo III pag. 252; dalla quale opera trassi i presenti cenni storici.

Il padre Bouvet, gesuita, missionnario della China, cui Leibnitz comunicò la sua „Aritmetica binaria", opinò che solo col mezzo della medesima era possibile indagare il senso d'una inscrizione antica lasciata dall'imperatore Fohi, di cui da quasi un millennio s'era smarrito il significato; tale inscrizione consiste in combinazioni differenti d'una lineetta intera (—, che vale **uno**), con una lineetta spezzata (- , che vale **zero**), e le unità di ordine diverso, rappresentanti le successive potenze della base due, sono poste le une sotto le altre per modo che le unità semplici (ordine zero) occupano la linea superiore e si ottiene lo schema quì appresso:



ecc. ecc.; per formare dei numeri più elevati occorrerebbero evidentemente delle altre asticelle da porsi al di sotto delle quattro quì adoperate.

Sembra che Pitagora e la sua scuola, presso i quali il numero quattro era tenuto in gran conto, avessero adottato questo numero quale base del sistema numerico „quaternario" e sul medesimo erigessero la loro aritmetica; certo è però che Erhard Weigel (Weigelius) nel 1672 prendendo a modello la scuola pitagorica scrisse un'„Aritmetica quaternaria" dalla quale si riprometteva grandi vantaggi sì per la teoria che per le pratiche applicazioni; vantaggi, i quali si dovevano naturalmente rendere illusorî, in quantochè mentre tale sistema non riduce come il binario una qualunque operazione ad essere eseguita esclusivamente sopra due sole cifre, (essendovene quattro invece e cioè: 0, 1, 2, 3), soffre pur sempre del gravissimo inconveniente di dover scrivere con un gran numero di cifre anche un numero relativamente piccolo.

Nei testi elementari di matematica trovasi ordinariamente un capitolo intitolato: „sistemi differenti di numerazione“ „scale di notazione“ ecc., nei quali precipuamente si tratta dei problemi fondamentali relativi al passaggio da un sistema di numerazione ad un altro; — nelle seguenti pagine mi propongo di trattare più ampiamente quest'argomento e di dimostrare particolarmente che i metodi tenuti nell' aritmetica comune (decimale) per eseguire un' operazione di calcolo qualunque, come pure la disposizione grafica adottata quale più opportuna nei calcoli medesimi sono generali ed estensibili quindi anche ai calcoli fatti nell' aritmetica a base non decimale. In relazione a questo duplice scopo prefissomi passo in rassegna i problemi più importanti dell' aritmetica comune nei capitoli V, VI, VII, XIV, XVI, XVIII, XIX, XX e XXI.

Colla scorta del Todhunter chiamo „radicali“ quelle frazioni, il cui denominatore è una potenza della base (radice) del sistema numerico, per analogia alle „frazioni decimali“ nell'aritmetica comune; quindi il termine: „numeri radicali“ è analogo a „numeri decimali“ ecc. — Nei capitoli II, III e IV tratto della trasformazione delle frazioni ordinarie in equivalenti frazioni radicali, della generazione delle frazioni radicali finite, periodiche semplici e periodiche miste e della trasformazione inversa, — problemi corrispondenti agli analoghi dell'aritmetica comune.

Dò inoltre ampio sviluppo ai criteri di divisibilità nel capitolo I e nell'Appendice al medesimo, sia perchè è argomento importantissimo di per se, sia perchè acquista anche maggior interesse dal punto di visto generale, cioè dell'aritmetica non decimale; ed a tal fine svolsi dapprima alcuni dei criterî generali più importanti indipendenti dalla scelta numerica della base ed indi studiai la divisibilità dei numeri, in ispecial modo se scritti in base 6, 10, 12, 30 e 60, per tutti i divisori primi non maggiori di 61; e m' assoggettai a tale lavoro, sebbene sapessi che taluni di questi criterî non possono avere pratica utilità alcuna, poichè credetti che potrebbero ciò non ostante presentare qualche interesse se non altro teorico. Per ottenere questi criterî feci materialmente le divisioni delle successive potenze della base per il divisore primo in questione, sino ad ottenere la ripetizione periodica dei resti. Noto subito quì che altri effettuando le medesime divisioni, potrà dedurne criterî di divisibilità forse differenti da quelli da me ottenuti*); poichè tra tutte le forme che a tali criterî possono conferirsi, scelsi quella che mi sembrò la più facile ad enunciarsi e che abbisognò di minor numero di operazioni ausiliarie e queste coi minimi numeri operatori possibili; mi spiego con un esempio scegliendo a caso una delle divisioni che dovetti eseguire: Si tratti adunque del criterîo di divisibilità per quarantatre d'un numero scritto in base dodici; dividendo le successive potenze della base per il nostro

*) Confrontisi p. es. il criterio di divisibilità per 17 d'un numero N scritto in base dieci, come è presentato in queste pagine, col teorema No. 97 dato a pag. 73 del Trattato Elementare di Aritmetica di A. e C. (13a Ed. 1877).

divisore fisso si ottengono i seguenti resti, che per semplicità scrivo in base dieci, 1, 12, 15, 8, 10, 34, 21, 37, 14, 39, 38, 26, 11, 3, 36, 2, 24, 30, 16, 20, 25; 42, 31, 28, 35, ...

Ora la prima osservazione che facciamo è la seguente: Il resto 42 che segue il resto 25 è la differenza tra 43 e 1 (1° resto); il 31 è la differenza tra 43 e 12 (2° resto); così 28 = 43—15 (3° resto); 35 = 43— 8 (4° resto) ecc. Onde prima ancora che si esauriscano i resti differenti possibili e che si arrivi quindi alla ripetizione periodica dei medesimi, e per così dire a metà strada giungiamo già a tale ripetizione, purchè accondiscendiamo ad ammettere resti negativi; talchè arrivati nel caso nostro al resto 25, i resti ad esso successivi potevano scriversi come segue:

—1, —12, 15, —8, —10, —34, —21, —37, - 14, —39, —38, -26, —11, —3, —36, —2, —24, —30, —16, —20, —25,

dopo di che si riprodurrebbe prima la serie dei resti positivi poi quella dei resti negativi, ma per altro equivalenti ai precedenti ecc. Onde vediamo la necessità di dover decomporre il numero **N** proposto, di cui studiamo la divisibilità per 43, qualora sia scritto in base dodici, — in classi da ventuna cifra ciascuna da destra a sinistra (quanti sono cioè i resti differenti del semiperiodo). Indi decomponendo ciascuna classe in gruppi da 7 cifre, ed analogamente ogni semiperiodo di resti in 3 gruppi da 7 resti ciascuno, vediamo che il 2° gruppo dei resti incomincia col resto **37**, corrispondente alla 1ª cifra del 2° gruppo di N, ed il 3° gruppo col resto **36**, corrispondente alla 1ª cifra del 3° gruppo di N. Prendendo ora questi resti quali sono, essi esigerebbero che si moltiplicasse il 2° gruppo per 37 ed il 3° gruppo per 36 che sarebbero numeri troppo forti. Se consideriamo però che 37 = 43—6 e 36 = 43—7; alla 1ª classe dei resti (1° semiperiodo) possiamo sostituire la seguente:

1, 12, 15, 8, 10, 34, 21; —6, —29, —4, —5, —17, —32, —40; —7, —41, —19, —13, —27, —23, -18; e

conseguentemente alla 2ª classe dei resti (2° semiperiodo) potremo sostituire la seguente:

—1, —12, —15, — 8, - 10, —34, —21; 6, 29, 4, 5, 17, 32, 40; 7, 41, 19, 13, 27, 23, 18;

dalle quali successioni di numeri risulta che se si moltiplicano i termini del 1° gruppo per 6 e si notano i resti, ottenuti nelle divisioni dei rispettivi prodotti pel divisore fisso 43, si ottengono i termini del 2° gruppo; e moltiplicando invece i termini del 1° gruppo per 7 e notando i resti delle divisioni per 43 come prima, si ottengono i termini del 3° gruppo; le quali considerazioni combinate assieme coll'enunciato del teorema generale sulla divisibilità (vedi ultimo teorema del 1° Capitolo) ci dànno il seguente criterio di divisibilità:

„Un numero N, scritto in base 12, è divisibile per 43, se decomposto in classi „da 21 cifre da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 3 gruppi da 7 cifre, „essendosi moltiplicato per 6 il gruppo medio e per 7 l'ultimo gruppo di ciascuna

„classe, e pigliando col segno + il primo gruppo delle classi d'ordine dispari ed i 2 „ultimi gruppi delle classi d'ordine dispari, e col segno — i gruppi rimanenti, la „somma algebrica dei gruppi così formati è divisibile per 43".

In modo analogo si sono ottenuti gli altri criterî speciali di divisibilità.

A proposito della divisibilità mi permetto quì ancora due parole sui numeri $(b + 1)$ e $(b - 1)$, i quali scritti in base **b**, godono di alcune proprietà notevoli, le più importanti delle quali meritano quì un cenno speciale:

I° In quanto al criterio della divisibilità d'un numero per $(b + 1)$, gli si può evidentemente dar le 3 forme seguenti:

1) Un numero N, scritto in base **b**, è divisibile per $(b + 1)$, se la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e quella delle cifre di posto pari è zero o divisibile $(b + 1)$; così $(2354)_{10}$ è divisibile per $(11)_{10}$ perchè $(4 + 3) - (5 + 2) = 0$.
2) Un numero N, scritto in base **b**, è divisibile per $(b + 1)$, se decomposto in gruppi da 2 cifre da destra a sinistra, la somma di questi gruppi è divisibile per $(b + 1)$; così $(2354)_{10}$ è divisibile per $(11)_{10}$, perchè $(54 + 23 = 77)_{10} = (7.11)_{10}$.
3) Un numero N, scritto in base **b**, è divisibile per $(b + 1)$, se decomposto in gruppi da 3 cifre da destra a sinistra, la differenza tra la somma dei gruppi d'ordine pari e quella dei gruppi d'ordine dispari, è divisibile per $(b+1)$; così $(2354)_{10}$ è divisibile per $(11)_{10}$, perchè $(354 - 2 = 352)_{10} = (32.11)_{10}$.

La dimostrazione generale di queste 3 forme diverse si darebbe come segue: I resti ottenuti dividendo le successive potenze $b^0, b^1, b^2, b^3, \ldots\ldots$ per $(b + 1)$ sono rispettivamente $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\ldots$ e da questa forma dei medesimi combinata col teorema generale di divisibilità (vedi alla fine del Capo I) segue la forma 1ª del criterio di div. per $(b + 1)$. — Ma a quella serie di resti si può evidentemente sostituire le seguente $1, b; 1, b; 1, b; \ldots\ldots$, la quale combinata ancora col teorema succitato dà la forma 2ª del criterio di divisibilità per $(b + 1)$, se i resti medesimi si aggruppano a 2 a 2. — Aggruppandoli invece nella forma primitiva a 3 a 3, se ne ottiene finalmente la forma 3ª del criterio di divisibilità per $(b + 1)$, sempre ben inteso col soccorso di quel teorema generale sopraccennato.

II° Le proprietà del numero $(b - 1)$ scritto in base **b**, che quì vorrei ancora sommariamente ricordare sono le seguenti:

1) Il criterio della divisibilità per $(b - 1)$, che è forse uno dei più semplici, perchè non richiede che la divisibilità della somma delle cifre del num. dato.
2) Quella proprietà che ha dato luogo alle prove per $(b - 1)$ alle operazioni; prove, che corrispondono alla prova del 9 dell'aritmetica comune, e che son trattate nel capitolo XXI del presente lavoro, e finalmente:
3) Se dato un numero N, scritto in base **b**, lo si rovescia, e si forma la dif-

ferenza tra il numero N dato ed il numero rovesciato, questa differenza riesce sempre divisibile per $(b - 1)$; infatti: Sia

$$N = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + a_{m-2} b^{m-2} + \ldots + a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0;$$

chiamando poi con R il valore di N rovesciato si ha

$$R = a_0 b^m + a_1 b^{m-1} + a_2 b^{m-2} + \ldots + a_{m-3} b^3 + a_{m-2} b^2 + a_{m-1} b + a_m;$$

e sottraendo l'una dall'altra tali relazioni abbiamo

$$N - R = (a_m - a_0) b^m + (a_{m-1} - a_1) b^{m-1} + (a_{m-2} - a_2) b^{m-2} + \ldots + \\ + (a_2 - a_{m-2}) b^2 + (a_1 - a_{m-1}) b + (a_0 - a_m),$$

il che si può anche scrivere così:

$$N - R = (a_m - a_0)(b^m - 1) + (a_{m-1} - a_1)(b^{m-1} - 1) + (a_{m-2} - a_2)(b^{m-2} - 1) + \\ + \ldots + (a_{m-r} - a_r)(b^{m-r} - 1);$$ ma $(b^p - 1)$ è sempre divisibile per $(b - 1)$ onde $N - R = M(b - 1)$, poiche, tutti i termini del 2° membro essendo multipli di $(b - 1)$, lo sarà pure la loro somma; dunque $N - R$ è divisibile per $(b - 1)$ come si voleva dimostrare. P. es.

$(7832)_{12} - (2387)_{12} = (5467)_{12}$ è divisibile per undici, essendo $5 + 4 + 6 + 7 =$ $=$ ventidue $=$ 2 volte undici; così

$(4578)_9 - (1754)_9 = (2716)_9$ è divisibile per otto, essendo $2 + 7 + 1 + 6 =$ $=$ sedici $=$ 2 volte otto ecc. ecc. ecc.*)

Nella medesima lusinga che cioè abbiano a riescire se non altro di qualche interesse teorico aggiunsi al presente lavoro alcune tavole ai Capitoli IX, X, XI, XII, XV. Le prime due dànno i quadrati e cubi dei numeri scritti in basi differenti, al quale proposito meritano ancora cenno speciale le seguenti notevoli relazioni:

per $b > 4$; $(12)^2_b = (144)_b$ e $(21)^2_b = (441)_b$; - per $b > 9$; $(13)^2_b = (169)_b$ e $(31)^2_b = (961)_b$; — per $b > 2$; $(11)^2_b = (121)_b$; — per $b > 8$; $(22)^2_b = (484)_b$; per $b > 3$; $(11)^3_b = (1331)_b$ ecc.

Altre due tavole si riferiscono ai numeri primi scritti in base sei (dove servono ad illustrare la formola $6n + 1$, perchè terminano tutti o per 1 o per 5) ed in base dodici. L'ultima è una tavola dei numeri non primi decomposti nei loro fattori primi coll'indicazione del numero di tutti i divisori. Noto a questo proposito che il problema della ricerca del minor numero, che abbia un numero dato di divisori non è risolubile in generale. Estesi le tavole a limiti troppo ristretti forse, ma spero che giovino almeno a far rilevare come simili ricerche non sieno del tutto prive d'interesse.

In quanto all'ordine delle cose esposte, mi son valso del principio di far precedere quei capitoli, il cui svolgimento non abbisognava delle teoriche seguenti e di posporre quindi quelli, che di tale ajuto abbisognavano; è per questo che p. es.

---

*) Per altre interessanti proprietà del numero $(b-1)$ vedi la voce **neuf** nell' „Encyclopedie methodique, — Mathematiques" Tomo II pag. 449--454, dove si dimostra che la divisione per $(b-1)$ d'un multiplo di $(b-1)$ si riduce ad una sottrazione; che la $N-R=M(b-1)$ vale ancora, se in R le cifre di N sieno comunque disposte ecc.

il capitolo sul passaggio da un sistema numerico ad altro sistema venne trattato dopo il calcolo degli interi e dei numeri radicali, inquantochè per la risoluzione dei problemi fondamentali relativi a tale passaggio occorrono precisamente delle divisioni e moltiplicazioni da eseguirsi in base differente dal dieci. A proposito delle quali operazioni noterò che posto il principio fondamentale della numerazione scritta p. es. in base dodici non trovai più necessario di corredare queste operazioni di ulteriori osservazioni, stantechè la disposizione grafica stessa dei calcoli, combinata al principio testè ricordato spiegava a sufficienza come tali operazioni dovevano esser effettuate ed ecco perchè nel capitolo V non trovasi quasi parola alcuna per illustrare le operazioni ivi eseguite.

Non ho creduto dover discorrere della numerazione parlata per sistemi numerici non decimali, inquantochè veduto quanto poco sieno in uso tali sistemi, essa si limiterebbe a distinguere unità di ordine 0, 1°, 2°, 3° ecc. rispetto alla base.

Nelle dimostrazioni poi ho tentato per quanto fu possibile di renderle simili a quelle che nell'aritmetica comune occorrono per argomenti analoghi; così dicasi p. es. di quelle contenute nel capitolo sulle frazioni periodiche semplici e miste.

Dove nello scritto si trovino numeri senza alcuna indicazione nè a piede dei medesimi nè in testa alle rispettive operazioni s'intendono numeri scritti in base dieci. Il simbolo N_b significa, il numero N essere scritto in base **b**, sicchè $N_{b_1} = N_{b_2}$, poichè i 2 simboli significano uno stesso numero N, solo che nel 1° membro è scritto in base $\mathbf{b}_1$ e nel 2° membro in base $\mathbf{b}_2$*). — Il simbolo $0,\dot{7}8\dot{5} = 0,785785785\ldots$ inf.; così $0,32\dot{7}8\dot{5} = 0,32785785785\ldots$ inf. — Il simbolo $\doteq$ vale „uguale press'a poco a"; così p. es. $0,667 \doteq \frac{2}{3}$ significa: 0,667 è press'a poco uguale a $\frac{2}{3}$.

Nelle ultime pagine mostrai le applicazioni dell'aritmetica duodecimale e trigesimale al calcolo dei numeri complessi ed ebbi cura di scegliere gli esempî corrispondenti per modo, che la risoluzione di alcuni fra i problemi trattati potesse servire a verificare la soluzione trovata negli altri.

---

*) Trattandosi di numeri particolari li chiudo tra parentesi e vi appongo a piedi l'indicazione della base, sicchè $(876\,\mathbf{ba})_{12} = 8.12^4 + 7.12^3 + 6.12^2 + 11.12 + 10$.

I. Criterî di divisibilità

nei sistemi numerici a base non decimale.

Sia **b** la base del sistema; allora un numero qualunque **N intero** si potrà rappresentare mediante la seguente formola generale:

$$N = c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + c_{m-2} b^{m-2} + \ldots\ldots + c_3 b_3 + c_2 b^2 + c_1 b + c_0,$$

in cui si suppone che il numero si scriva in quel sistema con *(m + 1)* cifre.

Intanto per analogia ai corrisp. criterî di divisibilità nel sist. num. decimale s'avranno le seguenti regole generali, che del resto colla massima facilità si possono anche direttamente ricavare, perchè quasi da per sè evidenti:

1) **N** *è divisibile per la base* **b**, *se* c_0 *è zero,* ed in generale **N** diviso per **b** dà lo stesso resto come c_0 diviso per **b**.
2) **N** *è divisibile per la* **2**ª *potenza della base (per* b^2*), se* $c_1 = c_0 = o$, ed in generale **N** diviso per b^2 dà lo stesso resto come $(c_1 b + c_0)$ diviso per b^2.
3) **N** *è divisibile per* b^3, b^4, ... b^r, *se sono nulle rispettivamente le ultime 3, 4, ... r cifre a destra di* **N**, ed in generale **N** diviso per b^3, b^4, ... b^r dà lo stesso resto come il numero formato rispettivamente dalle ultime 3, 4, ... **r** cifre alla sua destra diviso rispettivamente per b^3, b^4, ... b^r.

Corollarî:

ad 1) **N** è divisibile per un qualunque sottomultiplo **f** di **b**, se $c_0 = o$, oppure se c_0 è divisibile per **f**; ed in generale **N** diviso per **f** dà lo stesso resto come c_0 diviso per **f**.

ad 2) **N** è divisibile per f^2, se $c_1 = c_0 = o$, oppure se $(c_1 b + c_0)$ è divisibile per f^2; ed in generale **N** diviso per f^2 dà lo stesso resto come $(c_1 b + c_0)$ diviso per **f**.

ad 3) **N** è divisibile per f^3, f^4 .... f^r, se sono nulle rispettivamente le ultime 3, 4, ... **r** cifre a destra di **N**, oppure se il numero formato rispettivamente dalle ultime 3, 4, ... **r** cifre alla sua destra è divisibile per f^3, f^4, ... f^r; ed in generale **N** diviso per f^3, f^4, ... f^r dà lo stesso resto come il numero formato rispettivamente dalle ultime 3, 4, ... **r** cifre alla sua destra diviso rispettivamente per f^3, f^4, ... f^r.

Esempî per applicazione:

Un num. **N** scritto in base 12 è divisibile rispettivamente per 12, 144, 1728 ecc. se termina rispettivamente per uno, due, tre zeri ecc.; così **N** è p. es. divisibile rispettivamente per 2, 3, 4, 6, se l'ultima cifra a sua destra è rispettivamente divisibile per 2, 3, 4, 6; N è divisibile per 2^2, 3^2, 4^2, 6^2, se le ultime 2 cifre a destra formano un num. rispettivamente divisibile per 2^2, 3^2, 4^2, 6^2 ecc. ecc.

Un numero N scritto in base 7 è rispettivamente divisibile per 7, 49, 343 ecc., se termina rispettivamente per uno, due, tre zeri ecc. ecc.

4) N è divisibile per $(b-1)$, se la somma delle sue cifre è divisibile per $(b-1)$, ed in generale N diviso per $(b-1)$ dà lo stesso resto come la somma delle sue cifre divisa per $(b-1)$.

Infatti: N si può anche scrivere nella maniera seguente:

$$N = c_m (b^m - 1) + c_{m-1} (b^{m-1} - 1) + c_{m-1} (b^{m-2} - 1) + \ldots\ldots + c_3 (b^3 - 1) + \\ + c_2 (b^2 - 1) + c_1 (b - 1) + [c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots\ldots + c_{m-2} + c_{m-1} + c_m]$$

Ora tutti i binomî chiusi tra parentesi sono multipli di $(b-1)$; per cui anche la somma di quei prodotti binomiali sarà evidentemente multipla di $(b-1)$ e ponendola eguale a $M(b-1)$ si ha

$$N = M(b-1) + (c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots\ldots + c_{m-2} + c_{m-1} + c_m),$$

da cui segue appunto che N è divisibile o no per $(b-1)$, a seconda che sia o no divisibile per $(b-1)$ la somma

$$(c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \ldots\ldots + c_{m-2} + c_{m-1} + c_m);$$

e che questa somma divisa per $(b-1)$ dà in generale lo stesso resto come N diviso per $(b-1)$, come si voleva dimostrare.

Esempî per l' applicazione:

Un numero N scritto in base 12 è divisibile per 11, se la somma delle sue cifre è divisibile per 11

Un numero N id. 8 id. 7 id. id.
è divisibile per 7.

ecc. ecc. ecc. ecc.

5) N è divisibile per $(b+1)$, se la somma delle cifre di posto dispari diminuita della somma delle cifre di posto pari dà una *differenza nulla* o divisibile per $(b+1)$, ed in generale N diviso per $(b+1)$ dà lo stesso resto come quella *differenza* divisa per $(b+1)$.

Infatti: Scriveremo ora N nella maniera che segue:

per m pari: $$N = c_1 (b+1) + c_2 (b^2 - 1) + c_3 (b^3 + 1) + c_4 (b^4 + 1) + \ldots\ldots + \\ + c_{m-2} (b^{m-2} - 1) + c_{m-1} (b^{m-1} + 1) + c_m (b^m - 1) + \\ + [c_0 + c_2 + c_4 + \ldots + c_m] - [c_1 + c_3 + c_5 + \ldots + c_{m-1}]$$

e per m disp.: $$N = c_1 (b+1) + c_2 (b^2 - 1) + c_3 (b^3 + 1) + c_4 (b^4 - 1) + \ldots\ldots + \\ + c_{m-2} (b^{m-2} + 1) + c_{m-1} (b^{m-1} - 1) + c_m (b^m + 1) + \\ + [c_0 + c_2 + c_4 + \ldots + c_{m-1}] - [c_1 + c_3 + c_5 + \ldots + c_m].$$

Ora tutti i binomî chiusi tra parentesi sono multipli di $(b+1)$; per cui anche la somma di quei prodotti binomiali sarà evidentemente multipla di $(b+1)$ e ponendola eguale a $M(b+1)$ si ha

per m pari: $$N = M_1 (b+1) + (c_0 + c_2 + \ldots + c_m) + \\ - (c_1 + c_3 + c_5 + \ldots + c_{m-1})$$

e per m disp.: $$N = M_2 (b+1) + (c_0 + c_2 + \ldots + c_{m-1}) \\ - (c_1 + c_3 + c_5 + \ldots + c_m)$$

$N = M(b+1) + S_d - S_p$
S_d = somma delle cifre di posto dispari
S_p = somma delle cifre di posto pari

da cui segue appunto che N è o no divisibile per $(b+1)$ a seconda che sia o no divisibile per $(b+1)$ la differenza di quelle due somme S_d e S_p e che tale differenza $S_d - S_p$ divisa per $(b+1)$ dà in generale lo stesso resto come N diviso per $(b+1)$;

si vede altresì che essendo $S_d = S_p$, quella differenza si annulla, ed **N** riesce anche in questo caso divisibile per $(b + 1)$, come si voleva dimostrare.

Esercizî per l' applicazione:

Un numero **N** scritto in base **12** è divisibile per **13**, se la differenza suddescritta è o zero, o divisibile per **13**

Un numero **N** id. **6** id. **7** id. id.
è o zero, o divisibile per **7**.

6) *N_b è divisibile per $(b - r)$, se è divisibile per $(b - r)$ la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ciascuna cifra c_p di N_b per la potenza corrispondente r^p, cioè di grado uguale all' ordine rappresentato dalla cifra c_p;* ed N_b diviso per $(b - r)$ dà lo stesso resto come la somma suddetta divisa per $(b - r)$; ossia *N è divisibile per (b—r), se è divisibile per (b—r) il numero N_r scritto in base* r *colle cifre di N_b ecc.*

Infatti: N_b si può anche scrivere come segue:

$$N_b = c_m (b^m - r^m) + c_{m-1} (b^{m-1} - r^{m-1}) + c_{m-2} (b^{m-2} - r^{m-2}) + \dots +$$
$$+ c_3 (b^3 - r^3) + c_2 (b^2 + r^2) + c_1 (b - r) +$$
$$[c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + \dots + c_{m-2} r^{m-2} + c_{m-1} r^{m-1} + c_m r^m].$$

Ora tutti i binomî chiusi tra parentesi sono multipli di $(b - r)$, per cui sarà pur multipla di $(b - r)$ la somma di quei prodotti binomiali e ponendola uguale a $M (b - r)$ si ha

$$N_b = M (b - r) + [c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + \dots + c_{m-1} r^{m-1} + c_m r^m] =$$
$$= M (b - r) + N_r$$

da cui segue appunto, come si voleva dimostrare, che N_b è divisibile o no per $(b—r)$, a seconda che N_r sia o no divisibile per $(b—r)$; e che N_r diviso per $(b—r)$ dà lo stesso resto come N_b diviso per $(b—r)$.

Esempî per l' applicazione:

$(247)_{12}$ è divisibile per 7, perchè $2.5^2 + 4.5 + 7 = 50 + 20 + 7 = 77 = 7.11 =$
$= \text{mult. di } 7$

$(446)_{12}$ id. id. 5, id. $4.7^2 + 4.7 + 6 = 196 + 28 + 6 = 230 = 5.46 =$
$= \text{mult. di } 5$

ecc. ecc. ecc. ecc.

7) *N_b è divisibile per $(b+r)$, se è divisibile per $(b+r)$ il numero N_{-r} scritto in base —r colle cifre di N_b;* ed N_b diviso per $(b + r)$ dà lo stesso resto come N_{-r} diviso per $(b+r)$; N_{-r} è pure definibile, analogamente a quanto si trovò nel teorema precedente, quale somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ciascuna cifra c_p di N_b per la potenza corrispondente $(-r)^p$ (cioè di grado uguale all' ordine rappresentato da quella cifra).

Infatti: Scriviamo N_b nella forma che segue:

Per m pari: $N_b = c_1 (b + r) + c_2 (b^2 - r^2) + c_3 (b^3 + r^3) + \dots +$
$$+ c_{m-2} (b^{m-2} - r^{m-2}) + c_{m-1} (b^{m-1} + r^{m-1}) + c_m (b^m - r^m) +$$
$$+ [c_0 + c_2 r^2 + c_4 r^4 + \dots + c_m r^m] - [c_1 r + c_3 r^3 + c_5 r^5 + \dots + c_{m-1} r^{m-1}]$$

Per m disp: $N_b = c_1 (b + r) + c_2 (b^2 - r^2) + c_3 (b^3 + r^3) + \dots +$
$$+ c_{m-2} (b^{m-2} + r^{m-2}) + c_{m-1} (b^{m-1} - r^{m-1}) + c_m (b^m + r^m) +$$
$$+ [c_0 + c_2 r^2 + c_4 r^4 + \dots + c^{m-1} r^{m-1}] - [c_1 r + c_3 r^3 + c_5 r^5 + \dots + c_m r^m].$$

Ora tutti i binomî chiusi tra parentesi sono multipli di $(b+r)$, per cui sarà pur multipla di $(b+r)$ la somma di quei prodotti binomiali; poniamola uguale a $M(b+r)$. In quanto alla differenza dei 2 polinomî che seguono, essa è evidentemente uguale a N_{-r} tanto per **m** pari, come per **m** dispari; poichè per le nostre convenzioni abbiamo

$$N_{-r} = c_m(-r)^m + c_{m-1}(-r)^{m-1} + c_{m-2}(-r)^{m-2} + \ldots + c_1(-r) + c_0 =$$
$$= [c_0 + c_2 r^2 + c_4 r^4 + \ldots] - [c_1 r + c_3 r^3 + c_5 r^5 + \ldots];$$

quindi ricorrendo a questo simbolo non occorre distinguere, se sia **m** pari o dispari.

Onde possiamo scrivere $N_b = M(b+r) + N_{-r}$, da cui segue appunto, come si voleva dimostrare, che N_b è divisibile o no per $(b+r)$, a seconda che N_{-r} sia o no divisibile per $(b+r)$, e che N_b diviso per $(b+r)$ dà lo stesso resto come N_{-r} diviso per $(b+r)$.

Esempî per le applicazioni:

$(66)_7$ è divisibile per 12, perchè $6.(-5)+6 = -24 = 12.(-2)$ mult. di 12

$(2046)_7$ è divisibile per 10, perchè $2(-3)^3 + 0.(-3)^2 + 4(-3) + 6 =$
$= -54 - 12 + 6 = -60 = 10.(-6)$ mult. di 10

$(3603)_7$ è divisibile per 13, perchè $3(-6)^3 + 6(-6)^2 + 0(-6) + 3 =$
$= -648 + 216 + 3 = -429 = 13.(-33)$ mult. di 13.

Gli ultimi 2 teoremi potevano essere anche enunciati nel modo seguente: *)

6) I numeri N_b ed N_r divisi per $(b-r)$ danno resti uguali; — quindi se uno di essi è divisibile per $(b-r)$, anche l'altro sarà divisibile per $(b-r)$.

7) I numeri N_b ed N_{-r} divisi per $(b+r)$ danno resti uguali; — quindi se uno di essi è divisibile per $(b+r)$, anche l'altro sarà divisibile per $(b+r)$.

Esempî:

N_{12} ed N_5	divisi per	**7**	danno resti uguali;	se N_5 è divisibile per **7**,	anche N_{12} è div. per **7** e viceversa.
N_{12} ed N_5	id.	**17**	id.	id.	se N_5 è divisibile per **17**, anche N_{12} è div. per **17** e viceversa.
N_{24} ed N_5	id.	**19**	id.	id.	se N_5 è divisibile per **19**, anche N_{24} è div. per **19** e viceversa.
N_{24} ed N_5	id.	**29**	id.	id.	se N_5 è divisibile per **29**, anche N_{24} è div. per **29** e viceversa.
N_{18} ed N_5	id.	**13**	id.	id.	se N_5 è divisibile per **13**, anche N_{18} è div. per **13** e viceversa.
N_{18} ed N_5	id.	**23**	id.	id.	se N_5 è divisibile per **23**, anche N_{18} è div. per **23** e viceversa.
	ecc.		ecc.	ecc.	ecc.

*) Giova notare che i teoremi 4° e 5° sono evidentemente casi speciali di questi 2 ultimi 6° e 7°; solo che s'è preferito dar loro quella forma particolare, perchè forse più corrispondente alle applicazioni. — A proposito del teorema 7° osserviamo che può tornare forse di qualche interesse teorico, non privo di attinenze alle pratiche applicazioni, di occuparsi anche di sistemi di numerazione a base negativa; e nutro fiducia di poter quanto prima presentare un piccolo lavoro su tale argomento.

8) N_b è divisibile per n, se è divisibile per n la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ciascuna cifra c_p per il resto della divisione $b_p : n$ ad essa corrispondente; e la somma di questi prodotti divisa per n dà lo stesso resto come N_b diviso per n.

Infatti: S'abbiano le seguenti relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} b^0 : n = o + \frac{1}{n} \\ b^1 : n = q_1 + \frac{r_1}{n} \\ b^2 : n = q_2 + \frac{r_2}{n} \\ \text{— — —} \\ b^p : n = q_p + \frac{r_p}{n} \\ \text{— — —} \\ b^m : n = q_m + \frac{r_m}{n} \end{array}\right\} \text{Da cui si ricava:} \left\{\begin{array}{l} b^0 = n.o + 1 \\ b^1 = nq_1 + r_1 \\ b^2 = nq_2 + r_2 \\ \text{— — —} \\ b^p = nq_p + r_p \\ \text{— — —} \\ b^m = nq_m + r_m \end{array}\right\}$$

e moltiplicando queste ultime relazioni ordinatamente e rispettivamente per c_0, c_1, c_2, ... c_p, ... c_m e sommando, si ottiene evidentemente la seguente relazione:

$$N_b = n(q_1 c_1 + q_2 c_2 + \ldots + q_p c_p + \ldots + q_m c_m) + (c_0 + c_1 r_1 + c_2 r_2 + \\ + \ldots + c_p r_p + \ldots + c_m r_m).$$

Ora da quest'equazione chiaro risulta come N_b si componga di 2 parti la 1ª delle quali è manifestamente multipla di n e la 2ª è la somma dei prodotti ottenuti moltplicando ciascuna cifra di N_b per il resto della divisione corrispondente; e quindi N_b sarà o no divisibile per n a seconda che quella somma sarà o no divisibile per n; e questa somma divisa per n darà in generale lo stesso resto come N_b diviso per n; come si voleva dimostrare.

Nota: Quest'ultimo teorema è il più generale nella teoria della divisibilità dei numeri.

Esempi:

Essendo:

$12^0 : 5 = 0 + \frac{1}{5}$ | $12^0 : 7 = 0 + \frac{1}{7}$ sarà $(247)_{12}$ div. per 7, perchè $2.4 + 4.5 + 7.1 = 8 + 20 + 7 = 35 = 7.5 =$ = mult. di 7

$12^1 : 5 = 2 + \frac{2}{5}$ | $12^1 : 7 = 1 + \frac{5}{7}$

$12^2 : 5 = 28 + \frac{4}{5}$ | $12^2 : 7 = 20 + \frac{4}{7}$ $(500)_{12}$ div. per 5, perchè $5.4 + 0.2 + 0.1 = 20 =$ mult. di 5

$12^3 : 5 = 345 + \frac{3}{5}$ | $12^3 : 7 = 246 + \frac{6}{7}$ ecc. ecc. ecc.

— — — — | — — — —

Essendo poi:

$7^0 : 12 = 0 + \frac{1}{12}$ | $7^0 : 10 = 0 + \frac{1}{10}$ sarà $(66)_7$ div. per 12, perchè $6.7 + 6 = 48 = 12.4$

$7^1 : 12 = 0 + \frac{7}{12}$ | $7^1 : 10 = 0 + \frac{7}{10}$ $(2046)_7$ div. per 10, perchè $2.3 + 4.7 + 6 = 40 = 10.4$

$7^2 : 12 = 4 + \frac{1}{12}$ | $7^2 : 10 = 4 + \frac{9}{10}$ ecc. ecc. ecc.

$7^3 : 12 = 28 + \frac{7}{12}$ | $7^3 : 10 = 34 + \frac{3}{10}$

— — — — | — — — —

Appendice al Capitolo I.

Criterî speciali di divisibilità.

Introduzione.

S'è già veduto prima come s'esprimano le condizioni generali di divisibilità per numeri scritti in base qualunque. Studiamo ora tali condizioni in ispecialità per le basi 6, 10, 12, 30, 60 (che più occorrono nelle applicazioni) e relativamente a soli divisori *primi* non superiori al numero 61; chè pei divisori non primi valgono le cose già dette in generale. Ad ogni modo riepilogando diremo:

I Per un numero N scritto in base sei

N è divisibile	per 2, 3, 6,	se lo è	la sua *ultima* cifra a destra o se termina per *zero*
N è	id.	per $2^2, 3^2, 6^2$,	id.	il numero formato dalle ultime *due* cifre a destra o se termina per *due* zeri
N è	id.	per $2^3, 3^3, 6^3$,	id.	il numero formato dalle ultime *tre* cifre a destra o se termina per *tre* zeri
		ecc.	ecc.	ecc.	ecc.

II Per un numero N scritto in base dieci

N è divisibile	per 2, 5, 10,	se lo è	la sua *ultima* cifra a destra o se termina per *zero*
N è	id.	per $2^2, 5^2, 10^2$,	id.	il numero formato dalle ultime *due* cifre a destra o se termina per *due* zeri
N è	id.	per $2^3, 5^3, 10^3$,	id.	il numero formato dalle ultime *tre* cifre a destra o se termina per *tre* zeri
		ecc.	ecc.	ecc.	ecc.

III Per un numero N scritto in base dodici

N è divisibile	per 2, 3, 4, 6, 12,	se lo è	la sua *ultima* cifra a destra o se termina per *zero*
N è	id.	per $2^2, 3^2, 4^2, 6^2, 12^2$,	id.	il numero formato dalle ultime *due* cifre a destra o se termina per *due* zeri
N è	id.	per $2^3, 3^3, 4^3, 6^3, 12^3$,	id.	il numero formato dalle ultime *tre* cifre a destra o se termina per *tre* zeri
		ecc.	ecc.	ecc.	ecc.

IV Per un numero N scritto in base trenta

N è divisibile per 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, se lo è la sua *ultima* cifra a destra, o se termina per *zero*

N è id. per $2^2, 3^2, 5^2, 6^2, 10^2, 15^2, 30^2$, id. il numero formato dalle ultime *due* cifre a destra o se termina per *due* zeri

N è id. per $2^3, 3^3, 5^3, 6^3, 10^3, 15^3, 30^3$, id. il numero formato dalle ultime *tre* cifre a destra o se termina per *tre* zeri

ecc. ecc. ecc. ecc.

V Per un numero N scritto in base sessanta

N è divisibile per 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, se lo è la sua *ultima* cifra a destra, o se termina per *zero*

N è id. per $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 10^2, 12^2, 15^2, 20^2, 30^2, 60^2$, id. il numero formato dalle ultime *due* cifre a destra o se termina per *due* zeri

N è id. per $2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 10^3, 12^3, 15^3, 20^3, 30^3, 60^3$, id. il numero formato dalle ultime *tre* cifre a destra o se termina per *tre* zeri

ecc. ecc. ecc. ecc.

Divisori primi.

I. Divisibilità per due.

Un numero N è divisibile per due, se scritto in

base 6, termina per zero o per cifra divisibile per due
id. 10, id. id. id. id.
id. 12, id. id. id. id.
id. 30, id. id. id. id.
id. 60, id. id. id. id.

II. Divisibilità per tre.

Un numero N è divisibile per tre, se scritto in

base 6, termina per zero o per cifra divisibile per tre
id. 10, la somma delle sue cifre è divisibile per tre
id. 12, termina per zero o per cifra divisibile per tre
id. 30, id. id. id. id.
id. 60, id. id. id. id.

III. Divisibilità per cinque.

Un numero N è divisibile per cinque, se scritto in

base 6, la somma delle sue cifre è divisibile per cinque
id. 10, se termina per cinque o per zero
id. 12, e decomposto in gruppi da 2 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari e quello dei gruppi di posto pari è divisibile per 5*)
id. 30, se termina per zero o per cifra divisibile per 5
id. 60, se termina per zero, oppure per cifra divisibile per 5.

IV. Divisibilità per sette.

Un numero N è divisibile per sette, se scritto in

base 6 la differenza fra la somma delle cifre di posto dispari e quella delle cifre di posto pari è divisibile per 7*)
id. 10, e decomposto in gruppi da 3 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari e quella dei gruppi di posto pari è divisibile per 7
id. 12, e decomposto in gruppi da 3 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari e quella dei gruppi di posto pari è divisibile per 7
id. 30, e decomposto in gruppi da 3 cifre, da destra a sinistra, la somma di questi gruppi è divisibile per 7
id. 60, e decomposto in gruppi da 3 cifre, da destra a sinistra, la somma di questi gruppi è divisibile per 7.

V. Divisibilità per undici.

Un numero N è divisibile per undici, se scritto in

base 6, e decomposto in gruppi da 5 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari e quella dei gruppi di posto pari è divisibile per 11
id. 10, la differenza fra la somma delle cifre di posto dispari e quella delle cifre di posto pari è divisibile per 11
id. 12, la somma delle sue cifre è divisibile per 11.
id. 30, e decomposto in gruppi da 5 cifre, da destra a sinistra, ecc. in tutto e per tutto come in base 6
id. 60, e decomposto in gruppi da 5 cifre, da destra a sinistra, la somma di questi gruppi è divisibile per 11.

VI. Divisibilità per tredici.

Un numero N è divisibile per tredici, se scritto in

base 6, e decomposto in classi da 6 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in gruppi da 3 cifre; pigliando col segno + i gruppi d'ordine dispari

*) Questa locuzione vuol significare che la somma dei gruppi di posto dispari è minuendo, e quello degli altri gruppi è sottraendo; vedi ancora a pag. 3, 4 e 5.

delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari, e col segno — i gruppi rimanenti, essendosi prima moltiplicato per 5 ciascun gruppo d'ordine pari, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 13

base 10, e decomposto in gruppi da 3 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi d'ordine dispari e quella degli altri gruppi è divisibile per 13

id. 12, la differenza fra la somma delle cifre di posto dispari e quella delle cifre di posto pari è divisibile per 13

id. 30, (come per la base 10)

id. 60, e decomposto in gruppi da 2 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi d'ordine dispari e quella degli altri gruppi è divisibile per 13.

VII. Divisibilità per diciasette

Un numero N è divisibile per diciasette, se scritto in

base 6, e decomposto in classi da 8 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in gruppi da 4 cifre, essendosi moltiplicato per 4 ciascun gruppo d'ordine pari, e pigliando col segno + i gruppi delle classi d'ordine dispari, e col segno — i rimanenti gruppi, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 17

id. 10, (come per la base 6)

id. 12, come per la base 6, solo che si pigliano col segno + i gruppi d'ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari, e col segno — i rimanenti gruppi

id. 30, e decomposto in gruppi da 2 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi d'ordine dispari e quella degli altri gruppi è divisibile per 17

id. 60, e decomposto in gruppi da 4 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi d'ordine dispari e quella degli altri gruppi è divisibile per 17.

VIII. Divisibilità per diciannove.

Un numero N è divisibile per diciannove, se scritto in

base 6, e decomposto in classi da 9 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, l'uno a destra di 4 cifre, e l'altro di 5 cifre, essendosi moltiplicato quest'ultimo per 4, la somma dei gruppi così formati è divisibile per 19

id. 10, e decomposto come in base 6, solo che il 1° gruppo a destra è di 5 cifre, e l'altro di 4 cifre, essendosi moltiplicato quest'ultimo per 3, e pigliando col segno + i gruppi delle classi d'ordine dispari, e col — segno i rimanenti gruppi, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 19

id. 12, e decomposto in gruppi da 3 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi d'ordine dispari e quella degli altri gruppi è divisibile per 19

base 30, e decomposto in gruppi da 3 cifre, da destra a sinistra, la somma di questi gruppi è divisibile per 19

id. 60, e decomposto in classi da 9 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, l'uno a destra di 5 cifre e l'altro di 4 cifre, essendosi moltiplicato quest' ultimo per 4, e pigliando col segno + i gruppi d' ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari, e col segno — i rimanenti gruppi, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 19.

IX. Divisibilità per ventitre

Un numero N è divisibile per ventitre, se scritto in

base 6, e decomposto in classi da 11 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, l'uno a destra di 5 cifre e l'altro di 6 cifre, essendosi moltiplicato quest' ultimo per 2, la somma dei gruppi così formati è divisibile per 23

id. 10, e decomposto come in base 6, solo che il 2° gruppo di ciascuna classe s'è moltiplicato per 4, pigliando col segno + i gruppi d'ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari, e col segno — i rimanenti gruppi, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 23

id. 12, e decomposto come in base 6, solo che il 2° gruppo di ciascuna classe s'è moltiplicato per 5, pigliando col segno + i gruppi d'ordine dispari di *tutte* le classi, e col segno — i rimanenti gruppi, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 23

id. 30, e decomposto come in base 6, solo che il 1° gruppo a destra di ciascuna classe è di 6 cifre, e l'altro è di 5 cifre, essendosi moltiplicato quest' ultimo per 4 e pigliando col segno + i gruppi delle classi d' ordine dispari e col segno — gli altri gruppi, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 23.

id. 60, tutto come in base 30, solo che il 2° gruppo di ciascuna classe è moltiplicato per 3.

X. Divisibilità per ventinove.

Un numero N è divisibile per ventinove, se scritto in

base 6, e decomposto in gruppi da 7 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi d'ordine dispari e quella dei gruppi d'ordine pari è divisibile per 29

id. 10, e decomposto in classi da 14 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi da 7 cifre, essendosi moltiplicato per 12 il gruppo a sinistra di ciascuna classe e pigliando col segno + i gruppi d'ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari, e col segno — i gruppi rimanenti, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 29

id. 12, e decomposto in gruppi da 2 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi d'ordine dispari e quella dei gruppi d'ordine pari è divisibile per 29.

base 30, la somma delle sue cifre è divisibile per 29

id. 60, è decomposto e disposto come in base 10, solo che si pigliano col segno + tutti i gruppi delle classi d'ordine dispari e col segno — gli altri gruppi.

XI. Divisibilità per trentuno.

Un numero N è divisibile per trentuno, se scritto in

base 6, e decomposto in gruppi da 3 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi d'ordine dispari e quella dei gruppi d'ordine pari è divisibile per 31

id. 10, e decomposto in classi da 15 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 3 gruppi di 6 cifre ciascuno i 2 primi a destra, ed il terzo adunque di 3 cifre, essendosi moltiplicato in ogni classe il 2° gruppo per 2, ed il 3° gruppo per 4, la somma dei gruppi così formati è divisibile per 31

id. 12, e decomposto in classi da 15 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 3 gruppi, di 5 cifre ciascuno, essendosi moltiplicato in ogni classe il 2° gruppo per 5 ed il 3° gruppo per 6, e pigliando col segno + tutti i gruppi d'ordine dispari e col segno — i rimanenti gruppi, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 31

id. 30, e decomposto in gruppi da 2 cifre, da destra a sinistra, la somma dei gruppi è divisibile per 31

id. 60, e decomposto in gruppi da 5 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi di ordine dispari e quella dei gruppi d'ordine pari è divisibile per 31.

XII. Divisibilità per trentasette.

Un numero N è divisibile per trentasette, se scritto in

base 6, e decomposto in gruppi da 2 cifre, da destra a sinistra, la differenza fra la somma dei gruppi d'ordine dispari e quella dei gruppi d'ordine pari è divisibile per 37

id. 10, e decomposto in gruppi da 3 cifre, da destra a sinistra, la somma dei gruppi è divisibile per 37

id. 12, e decomposto in classi da 9 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, il 1° a destra di 5 cifre e l'altro quindi di 4 cifre, essendosi quest'ultimo moltiplicato per 7, la somma dei gruppi così formati è divisibile per 37

id. 30, è decomposto come in base 12, solo che il 1° gruppo a destra di ogni classe è di 4 cifre, e l'altro gruppo è quindi di 5 cifre, essendosi quest'ultimo moltiplicato per 4 e pigliando col segno + i gruppi d'ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari, e col segno — gli altri gruppi

id. 60, e decomposto in classi da 6 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi da 3 cifre, essendosi moltiplicato per 6 il gruppo a sinistra di ciascuna classe e pigliando col segno + i gruppi d'ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari e col segno — tutti i gruppi rimanenti, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 37.

XIII. Divisibilità per quarantuno.

Un numero N è divisibile per quarantuno, se scritto in

base 6, e decomposto in classi da 20 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi da 10 cifre, essendosi moltiplicato per 9 il gruppo a sinistra di ciascuna classe e pigliando col segno + i gruppi d'ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari, e col segno — tutti i gruppi rimanenti, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 41

id. 10, e decomposto in gruppi da 5 cifre, da destra a sinistra, la somma di questi gruppi è divisibile per 41

id. 12, è decomposto in classi e gruppi ecc. tutto come in base 6, solo che si pigliano col segno + tutti i gruppi delle classi d'ordine dispari e col segno — i gruppi rimanenti

id. 30, è decomposto in classi da 20 cifre e gruppi da 10 cifre ecc. in tutto e per tutto come in base 6, solo che si pigliano col segno + tutti i gruppi delle classi d'ordine dispari e col segno — i gruppi rimanenti

id. 60, come in base 6 (in tutto e per tutto).

XVI. Divisibilità per quarantatre.

Un numero N è divisibile per quarantatre, se scritto in

base 6, e decomposto in gruppi da 3 cifre, da destra a sinistra, la somma di questi gruppi è divisibile per 43

id. 10, e decomposto in classi da 21 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 3 gruppi da 7 cifre, essendosi moltiplicato per 6 il gruppo medio, e per (—7) il gruppo a sinistra di ciascuna classe, la somma algebrica dei gruppi così formati è divisibile per 43

id. 12, come in base 10, solo che essendosi moltiplicato per 6 il gruppo medio, e per 7 il gruppo a sinistra di ciascuna classe, si pigliano col segno + il 1° gruppo a destra delle classi d'ordine dispari, ed i 2 ultimi gruppi delle classi d'ordine pari e col segno — i rimanenti gruppi

id. 30, come in base 10, solo che essendosi moltiplicato per 7 il gruppo medio, e per 6 il gruppo a sinistra di ciascuna classe, si pigliano col segno + tutti i gruppi delle classi d'ordine dispari, e col segno — tutti gli altri gruppi

id. 60, come in base 30, solo che si pigliano col segno — esclusivamente i gruppi medî di ciascuna classe.

XV. Divisibilità per quarantasette.

Un numero N è divisibile per quarantasette, se scritto in

base 6, e decomposto in classi da 23 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 3 gruppi, il 1° a destra è di 7 cifre e gli altri di 8 cifre ciascuno, essendosi moltiplicato per 4 il gruppo medio e per 2 l'ultimo gruppo di ciascuna classe, la somma dei gruppi così formati è divisibile per 47

base 10, come in base 6, solo che i primi 2 gruppi a destra di ciascuna classe si compongono di 7 cifre cadauno e l'ultimo gruppo consta quindi di 9 cifre, ed essendosi moltiplicato per 2 il gruppo medio e per 4 l'ultimo gruppo di ciascuna classe; si considera la divisibilità per 47 della somma algebrica dei gruppi così formati, pigliando col segno + i gruppi d'ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari, e col segno — i gruppi rimanenti

id. 12, come in base 6, solo che il 1° gruppo a destra di ciascuna classe si compone di 7 cifre, il 2° è di 6 cifre e lo si moltiplica per (— 5), e l'ultimo gruppo consta quindi di 10 cifre e lo si moltiplica per 6; e si considera la divisibilità per 47 della somma algebrica dei gruppi così formati

id. 30, come in base 10, in tutto e per tutto, solo che si moltiplica per 3 il gruppo medio di ciascuna classe, e per 9 il gruppo a sinistra di ogni classe

id. 60, e decomposto in classi da 23 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, il 1° a destra è di 10 cifre, e l'altro, che consta quindi di 13 cifre, si moltiplica per 2, e si pigliano col segno + tutti i gruppi delle classi d'ordine dispari e col segno — gli altri gruppi, la somma algebrica dei gruppi così formati è divisibile per 47.

XVI. Divisibilità per cinquantatre.

Un numero N è divisibile per cinquantatre, se scritto in

base 6, e decomposto in classi da 13 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, il 1° a destra è di 7 cifre, e l'altro, che consta quindi di 6 cifre, si moltiplica per 10, e si pigliano col segno + i gruppi d'ordine dispari di tutte le classi e col segno — i gruppi rimanenti, la somma algebrica dei gruppi così formati è divisibile per 53

id. 10, e decomposto in classi da 13 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, il 1° a destra è di 6 cifre, e l'altro, che consta quindi di 7 cifre, si moltiplica per 4, e si pigliano col segno + i gruppi d'ordine dispari di tutte le classi come nel caso precedente (per la base 6), e col segno — i gruppi rimanenti, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 53

id. 12, e decomposto in classi da 26 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, il 1° a destra è di 11 cifre, e l'altro, che consta quindi di 15 cifre, si moltiplica per 2, e si pigliano col segno + tutti i gruppi delle classi d'ordine dispari, e col segno — i gruppi rimanenti, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 53

id. 30, e decomposto in gruppi da 2 cifre, la differenza fra la somma dei gruppi d'ordine dispari e quella dei gruppi d'ordine pari è divisibile per 53

id. 60, e decomposto in classi da 13 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, il 1° a destra è di 5 cifre, e l'altro che consta quindi di 8 cifre si moltiplica per 6, e si pigliano col segno + tutti i gruppi delle classi d'ordine dispari, e col segno i gruppi rimanenti, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 53.

XVII. Divisibilità per cinquantanove.

Un numero N è divisibile per cinquantanove, se scritto in

base 6, e decomposto in classi da 29 cifre da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, il 1° a destra di 14 cifre, e l'altro che consta quindi di 15 cifre si moltiplica per 7, e si pigliano col segno + tutti i gruppi delle classi d'ordine dispari, e col segno - i gruppi rimanenti, la somma algebrica così ottenuta è divisibile per 59

id. 10, e decomposto come in base 6, solo che il 1° gruppo a destra di ciascuna classe è di 15 cifre, e l'altro che consta quindi di 14 cifre si moltiplica per 7, e si pigliano col segno + i gruppi d'ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari, e col segno — i gruppi rimanenti, la somma algebrica dei gruppi così formati è divisibile per 59

id. 12, e decomposto come in base 6, solo che il 2° gruppo di ciascuna classe si moltiplica per 8, e si pigliano col segno + i gruppi d'ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari e col segno — gli altri gruppi

id. 30, e decomposto in classi da 29 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, il 1° a destra di 16 cifre, ed il 2° che consta quindi di 13 cifre si moltiplica per 9, e si pigliano col segno + tutti i gruppi delle classi d'ordine dispari, e col segno — i rimanenti gruppi, la somma algebrica dei gruppi così formati è divisibile per 59

id. 60, la somma delle sue cifre è divisibile per 59.

XVIII. Divisibilità per sessantuno.

Un numero N è divisibile per sessantuno, se scritto in

base 6, e decomposto in classi da 30 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 3 gruppi, i 2 primi a destra sono di 9 cifre ciascuno, ed il 3° è quindi di 12 cifre, essendosi moltiplicato per 8 il gruppo medio, e per 3 l'ultimo gruppo di ciascuna classe e pigliando col segno + tutti i gruppi delle classi d'ordine dispari, e col segno — i gruppi rimanenti, la somma algebrica dei gruppi così formati è divisibile per 61

id. 10, come in base 6, solo che il 1° gruppo a destra di ciascuna classe è di 12 cifre, e gli altri 2 sono di 9 cifre ciascuno, essendosi moltiplicato per 3 il gruppo medio, e per 8 il gruppo a sinistra di ciascuna classe, pigliando col segno + i gruppi d'ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari e col segno — i gruppi rimanenti, la somma algebrica dei gruppi così formati è divisibile per 61

id. 12, e decomposto in classi da 15 cifre da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 2 gruppi, il 1° a destra è di 9 cifre, ed il 2°, che consta quindi di 6 cifre, si moltiplica per 9, e pigliando col segno + tutti i gruppi delle classi d'ordine dispari e col segno — i gruppi rimanenti, la somma algebrica dei gruppi così formati è divisibile per 61

base 30, e decomposto in classi da 30 cifre, da destra a sinistra, di cui ciascuna si divide in 3 gruppi, il 1° a destra è di 11 cifre, il gruppo medio consta di 12 cifre e si moltiplica per 7, l'ultimo, che è quindi di 7 cifre, si moltiplica per 6, e pigliando col segno + i gruppi d'ordine dispari delle classi d'ordine dispari ed i gruppi d'ordine pari delle classi d'ordine pari, e col segno — i gruppi rimanenti, la somma algebrica dei gruppi così formati è divisibile per 61

id. 60, e decomposto in gruppi da 2 cifre, da destra a sinistra, la somma di questi gruppi è divisibile per 61.

II. Trasformazione delle frazioni ordinarie in radicali.

III. Generazione delle frazioni radicali finite, periodiche semplici e periodiche miste.

IV. Trasformazione inversa.

Chiameremo col Todhunter *radicali* quelle frazioni, che hanno per denominaore una potenza qualsi voglia della base del sistema numerico considerato.

S'abbia adunque una frazione $F = \frac{N}{D}$; la vogliamo trasformare in una frazione radicale equivalente $F = \frac{N_r}{b^m}$. Osserviamo che $\frac{N}{D} = \frac{(N \times b^m) : D}{b^m}$ (1); per cui sarà $N_r = (N \times b^m) : D$, semprechè tale divisione sia esatta; ora perchè ciò sia, nell'ipotesi che **N** e **D** sieno primi fra loro, occorre necessariamente che **b** e **D non** sieno primi fra loro, non solo, ma che altresì D non contenga altri fattori primi tranne quelli di **b**, poichè solo in tal caso esiste una potenza b^m divisibile per D; essendo cioè

$$b = \varphi.\lambda;\ D = \varphi^{\alpha} \cdot \lambda^{\beta};\ \alpha \geqq 0;\ \beta = \alpha + \nu;\ D = \varphi^{\alpha}.\lambda^{\alpha+\nu}$$

$$\text{onde } F = \frac{N}{D} = \frac{N}{\varphi^{\alpha}.\lambda^{\alpha+\nu}} = \frac{N.\varphi^{\nu}}{\varphi^{\alpha+\nu}.\lambda^{\alpha+\nu}} = \frac{N.\varphi^{\nu}}{b^{\beta}};$$

da cui ancora si ricava che, se **b** è un numero primo, una frazione ordinaria irriducibile qualunque **non** potrà mai essere trasformata in equivalente frazione radicale finita; onde si ottiene il seguente

Teorema I: Affinchè una frazione ordinaria irriducibile proposta sia la generatrice d'una equivalente frazione radicale finita è necessario e sufficiente che il denominatore della frazione proposta contenga esclusivamente i fattori primi della base.

Per ottenere poi la frazione radicale richiesta si proceda secondo la formola (1) e cioè come segue: Ridotta la frazione proposta alla più semplice espressione e scritti i suoi termini in base **b**, si divida il numeratore pel denominatore; alla destra del resto si ponga uno zero e si continui la divisione, ponendo sempre uno zero alla destra dei resti successivi fino a che si ottenga un resto zero; il quoziente in tal modo ottenuto rappresenterà il numeratore della frazione radicale domandata ed il denominatore potrà essere sottinteso mediante una virgola che separa gli interi contenuti nel

numero proposto dalla parte realmente frazionaria, analogamente a quanto si opera per le frazioni decimali, per modo che tante saranno le unità contenute nell' esponente **m** del denominatore della frazione radicale, quante sono le cifre del quoziente poste alla destra della *virgola* (che per analogia chiameremo) *radicale.*

Esempî in base dodici:

$$\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}=\frac{5.2.3^2}{2^4.3^2}=\frac{5.2.3^2}{10^2}=0{,}76$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1.2}{10}=0{,}2\,;\quad \frac{5}{16}=\frac{5}{2.3^2}=\frac{5.2^3}{10^2}=0{,}34.$$

Teorema II: Se ridotta una frazione ordinaria alla più semplice espressione e decomposto il suo denominatore nei suoi fattori primi, esso risulti *primo* con b, quella frazione ordinaria sarà la generatrice d' una frazione radicale periodica semplice (o pura), in cui cioè il periodo incomincia subito dopo la virgola ed avendo **n** cifre, sarà $n < D$.

Infatti:

$$F=\frac{N}{D}=\frac{(N\times b^m):D}{b^m};$$

ora la divisione nel numeratore non può mai riuscire esatta, comunque si scelga **m** t operando però nel calcolo delle successive cifre della frazione radicale col metodo insegnato alla pagina precedente, è evidente che anzitutto i residui differenti possibili non sono che 1, 2, 3..., (D −2), (D—1), essendosi escluso lo *zero,* perchè non puossi mai avere divisione esatta; onde se non prima, al più tardi dopo (D — 1) divisioni, si dovrà nuovamente presentare uno dei resti precedenti e siccome alla sua destra si pone lo zero e si continua l' operazione, dovranno pur riprodursi successivamente le cifre ottenute nel quoziente al primo presentarsi di quel tal residuo; ma io dico che quel *primo residuo che si ripete è uguale al numeratore della frazione ordinaria proposta,* che altrimenti il periodo non incomincierebbe subito fin dalla prima cifra dopo la virgola radicale.

Infatti s' abbia:

$$\left.\begin{array}{l} N\ :D=0+\frac{N}{D} \\ Nb\ :D=q_1+\frac{R_1}{D} \\ Nb^2:D=q_2+\frac{R_2}{D} \\ \text{— — — —} \\ Nb^n:D=q_n+\frac{R_n}{D} \\ \text{— — — —} \\ Nb^r:D=q_r+\frac{R_r}{D} \end{array}\right\}\ \text{Da queste si ha pure}\ \left\{\begin{array}{l} N\ =D.0\ +N \\ Nb\ =D.q_1+R_1 \\ Nb^2=Dq_2+R_2 \\ \text{— — — —} \\ Nb^n=Dq_n+R_n(3) \\ \text{— — — —} \\ Nb^r=Dq_r+R_r(4) \end{array}\right\}$$

Essendo $r > n$, sottriamo la (3) dalla (4) ed avremo $Nb^r - Nb^n = Dq_r - Dq_n$, per ipotesi essendo $R_r = R_n$; onde $Nb^n(b^{r-n}-1) = D(q_r - q_n)$ e dividendo per b^n si ha: $N(b^{r-n}-1)=\frac{D(q_r-q_n)}{b^n}$; ora essendo intero il 1° membro di quest' equazione sarà pure intero il 2° membro;

ma D è primo con b; onde $\frac{q_r-q_n}{b^n}=J$ (num.intero); quindi $N(b^{r-n}-1)=DJ$

$$\text{ossia}\ N\,b^{r-n}=DJ+N \qquad (I)$$

Sia $R_r = R_n$ il 1° resto che si ripete, dico che $R_r = N$.

Infatti l'equazione (I) ci dice, che contrariamente all' ipotesi fatta per cui R_r era il 1° resto che si ripete, vi sarebbe una divisione precedente

$$Nb^{r-n} : D = J + \frac{N}{D},$$

che dà N per resto, ma questo è pure il resto della 1ª divisione, dunque non sarebbe più R_r il 1° resto che si ripete, e tale assurdo non si toglie, se non per l'unica ipotesi che $n = 0$; poichè allora se ne ricava appunto

$$Nb^r : D = J + \frac{N}{D} \text{ e quindi } R_r = N$$

come si voleva dimostrare. — Concludiamo adunque, che siccome tale resto **N** ha pur dato la 1ª cifra del quoziente, ed i resti ad esso successivi dovendo essere rispettivamente uguali a quelli che succedettero **N** nella sua prima comparsa, questa successione periodica di resti rispettivamente uguali genererà pure necessariamente una successione periodica di cifre rispettivamente uguali nel quoziente, genererà adunque la frazione radicale periodica, il cui periodo (π) incomincia adunque subito dopo la virgola radicale, ha $r < D$ cifre, e si ottiene quindi la frazione „periodica semplice" seguente:

$$F = \frac{N}{D} = \frac{\pi}{b^r} + \frac{\pi}{b^{2r}} + \frac{\pi}{b^{3r}} + \ldots\ldots \text{inf.}$$

Esempî:

$$\tfrac{2}{5} = 2 : 5 = (0{,}49724972 \ldots\ldots)_{12}$$
$$\tfrac{3}{7} = 3 : 7 = (0{,}5186a35186a3 \ldots)_{12}$$

Teorema III: Se ridotta una frazione ordinaria alla più semplice espressione e decomposto il suo denominatore nei suoi fattori primi, tra i medesimi si trovano i *fattori primi* **della** *base* **b** *ed inoltre vi si trovano dei fattori primi* **colla** *base* **b**, quella frazione ordinaria sarà la generatrice d'una frazione radicale periodica mista, coll' „antiperiodo" formato da tante cifre quante sono le unità contenute del maggior esponente dei fattori primi **di** b, contenuti in D.

Infatti sia ancora come prima

$$F = \frac{N}{D} = \frac{(N \times b^m) : D}{b^m} \text{ (1) in cui } \mathbf{N} \text{ e } \mathbf{D} \text{ son primi tra loro.}$$

Sia inoltre

$$b = \varphi.\lambda;\ D = \varphi^\alpha . \lambda^\beta . d;\ \alpha \geqq 0;\ \beta = \alpha + \nu;$$

essendo **b** e **d** primi tra loro; allora s'avrà

$$F = \frac{N}{D} = \frac{N}{\varphi^\alpha . \lambda^{\alpha+\nu} . d} = \frac{N.\varphi^\nu}{\varphi^{\alpha+\nu} . \lambda^{\alpha+\nu} . d} = \frac{N.\varphi^\nu}{b^{\alpha+\nu} . d} = \frac{N.\varphi^\nu}{b^\beta . d} = \frac{N . \varphi^\nu : d}{b^\beta}$$

la quale espressione darebbe la frazione radicale richiesta equivalente alla proposta, se $(N\varphi^\nu : d)$ desse un quoziente esatto ma ciò non è possibile, essendo **d** primo con **b**, e **d** primo con N.

$$\text{Sia } N\varphi^\nu : d = Q + \frac{R}{d} \text{ sarà adunque } F = \frac{N\varphi^\nu : d}{b^\beta} = \frac{Q}{b^\beta} + \frac{R : d}{b^\beta},$$

da cui si vede che in tal modo siamo riusciti a calcolare il numero Q che forma le prime β cifre radicali della frazione radicale equivalente alla proposta frazione ordi-

naria. In quanto alle cifre che seguono, esse dipendono evidentemente dallo sviluppo di R : d, ma essendo R $<$ d, le otterremo se mai per analogia colla (1) dalla

(2) $\frac{R}{d} = \frac{(R \times b^m) : d}{b^m}$ ora in questa relazione **d** è primo con **R**, e **d** è pure primo con **b**, per cui comunque si scelga **m**, quella divisione non riescirà mai esatta e pel teorema II otterremo

$$\frac{R}{d} = \frac{\pi}{b^n} + \frac{\pi}{b^{2n}} + \frac{\pi}{b^{3n}} + \frac{\pi}{b^{4n}} + \ldots \text{ in infinito, onde segue che}$$

$$F = \frac{Q}{b^\beta} + \frac{\pi}{b^{\beta+n}} + \frac{\pi}{b^{\beta+2n}} + \frac{\pi}{b^{\beta+3n}} + \ldots \text{ in infinito,}$$

il che dimostra in realtà la frazione ordinaria proposta essere la generatrice d'una radicale periodica mista coll'„antiperiodo" (cioè il numero formato dalle cifre che precedono il periodo) formato da β cifre, da tante cioè, quante sono le unità contenute nel maggior esponente dei fattori primi **di b** contenuti in **D**; ed il numero **n** delle cifre del „periodo" π è *sempre minore* del numero **d** che è il prodotto dei fattori primi **con b** contenuti in D, come si voleva dimostrare.

Esempî in base dodici; a = dieci

$$\frac{3}{2.5} = 3 : a = 0{,}372497249 \ldots.$$

$$\frac{7}{3^2.5} = 7 : 39 = 0{,}1a49724972 \ldots.$$

Problema inverso.

Data una frazione radicale, trasformarla in equivalente frazione ordinaria.

1) Occupiamoci anzi tutto d'una *frazione radicale finita.* È chiaro, che tale trasformazione si farà semplicemente, scrivendo la frazione radicale proposta, non per mezzo della virgola radicale, ma ponendovi invece in evidenza il suo denominatore, che è l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre radicali della frazione proposta; ridotta poi la frazione alla più semplice espressione, si ottiene la frazione ordinaria generatrice della frazione radicale data.

Esempi:

Si tratti di numeri scritti in base **12**; a = 10; b = 11

I $0{,}a84 = \frac{a84}{1000} = \frac{281}{300}$ e per riprova nel sistema numerico decimale si ha

$$\left(\frac{a84}{1000}\right)_{12} = \frac{1540}{1728} = \frac{385}{432}$$

$$\text{II } 0{,}b7 = \left(\frac{b7}{100}\right)_{12} = \left(\frac{139}{144}\right)_{10};$$

III $0{,}a69 = \frac{a69}{1000} = \frac{121}{140}$ e per riprova nel sistema numerico decimale si ha

$$(0{,}a69)_{12} = \frac{1521}{1728} = \frac{169}{192}.$$

2) S'abbia poi una *frazione radicale periodica semplice F;* essendo π il periodo ed **n** il numero delle cifre tra significative e non significative che lo compongono si ha $F = \frac{\pi}{b^n} + \frac{\pi}{b^{2n}} + \frac{\pi}{b^{3n}} + \frac{\pi}{b^{4n}} + \ldots$ all'inf. — **F** rappresenta adunque la somma della progressione geometrica il cui 1° termine è $\frac{\pi}{b^n}$ ed il cui quoziente è $\frac{1}{b^n}$; onde per la nota formola si ha: $F = \frac{\pi}{b^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b^n}} = \frac{\pi}{b^n-1}$ che è quindi la frazione ordinaria generatrice della periodica proposta e ne ricaviamo la seguente

Regola: La frazione ordinaria generatrice d'una frazione radicale periodica semplice data si ottiene, ponendo per numeratore il periodo, e per denominatore tante volte la massima cifra significativa (b — 1) del sistema quante sono complessivamente le cifre (tra significative e non significative) del periodo.

Esempi: S'abbiano ancora numeri scritti in base 12; a = 10; b = 11;

$$\text{I} \quad F = 0{,}231523152315\ldots\ldots = \frac{2315}{bbbb} = \frac{257}{1111}$$

e colla verifica s' avrebbe essendo $(2315)_{12} = 3905$

$$F = \frac{3905}{12^4} + \frac{3905}{12^8} + \ldots\ldots = \frac{3905}{12^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{12^4}} = \frac{3905}{12^4-1} = \frac{3905}{20735} = \frac{355}{1885};$$

infatti $(257)_{12} = 355$ e $(1111)_{12} = 1885$.

$$\text{II} \quad F = 0{,}1111\ \ldots\ldots = \left(\frac{1}{b}\right)_{12} = \left(\frac{1}{11}\right)_{10}$$

$$\text{infatti } F = \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \ldots\ldots = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{12}} = \frac{1}{12-1} = \frac{1}{11}$$

$$\text{III} \quad F = 0{,}010101\ \ldots\ldots = \left(\frac{1}{bb}\right)_{12} = \left(\frac{1}{143}\right)_{10}$$

$$\text{infatti } F = \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^4} + \frac{1}{12^6} + \ldots\ldots = \frac{1}{12^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{12^2}} = \frac{1}{12^2-1} = \frac{1}{143}$$

$$\text{IV} \quad F = 0{,}001001001\ldots = \left(\frac{1}{bbb}\right)_{12} = \left(\frac{1}{1727}\right)_{10}$$

$$\text{infatti } F = \frac{1}{12^3} + \frac{1}{12^6} + \frac{1}{12^9} + \ldots\ldots = \frac{1}{12^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{12^3}} = \frac{1}{12^3-1} = \frac{1}{1727}$$

ecc. ecc. ecc.

3) Sia data finalmente una *frazione radicale periodica mista F,* il cui antiperiodo **Q** è composto di **m** cifre ed il cui periodo π sia di **n** cifre; s'avrà quindi

$$F = \frac{Q}{b^m} + \frac{\pi}{b^{m+n}} + \frac{\pi}{b^{m+2n}} + \frac{\pi}{b^{m+3n}} + \ldots \text{ all'infinito.*)}$$ Ossia:

*) **F** si presenta come la somma di 2 numeri, il 1° dei quali è $\frac{Q}{b^m}$, ed il 2° è la somma della progressione geometrica infinita e decrescente il cui 1° termine è $\frac{\pi}{b^{m+n}}$ e la ragione o quoziente ne è $\frac{1}{b^n}$; tale somma è data quindi dalla formola nota per le progressioni geometriche ed è uguale a $\frac{\pi}{b^{m+n}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b^n}}$.

$$F = \frac{Q}{b^m} + \frac{\pi}{b^{m+n}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b^n}} = \frac{Q}{b^m} + \frac{\pi}{b^m(b^n-1)} = \frac{Q(b^n-1)+\pi}{(b^n-1).b^m} =$$

$$= \frac{(Q.b^n+\pi)-Q^{*)}}{(b^n-1).b^m},$$

che è quindi la frazione ordinaria generatrice della frazione radicale periodica mista proposta e da questa formula ricaviamo la seguente

Regola: La frazione ordinaria generatrice d' una frazione radicale periodica mista si ottiene, ponendo per denominatore tante volte la massima cifra significativa (b — 1) del sistema quante sono le cifre (n) del periodo e scrivendo ancora alla destra del numero così ottenuto tanti zeri quante sono le cifre (m) dell'antiperiodo; — al numeratore si ponga la differenza di due numeri, di cui il minuendo è il numero formato dall'antiperiodo e dal 1° periodo, ed il sottraendo è l'antiperiodo.

Esempi: S'intendano anche qui i numeri scritti in base dodici

$$\text{I } F = 0,20\,456\,456\,456 \ldots\ldots \text{ all'infinito} = \frac{20456-20}{\text{bbb}\,00} =$$

$$= \frac{20436}{\text{bbb}00} = \frac{4087}{1\,\text{bba}\,0}.$$

Infatti per la verifica si ha trasportando i numeri nel sistema numerico decimale:

$$(4087)_{12} = 7015;\ (1\,\text{bba}\,0)_{12} = 41448;\ (20)_{12} = 24;\ (426)_{12} = 642$$

$$\text{onde } F = \frac{21045}{124344} = \frac{7015}{41448}$$

$$F = \frac{24}{12^2} + \frac{642}{12^5} + \frac{642}{12^8} + \frac{642}{12^{11}} + \ldots\ldots = \frac{24}{12^2} + \frac{642}{12^5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{12^3}} =$$

$$= \frac{24}{12^2} + \frac{642}{12^2(12^3-1)} = \frac{24(12^3-1)+642}{(12^3-1).12^2} = \frac{42090}{248688}$$

e semplificata per 6 dà $F = \frac{7015}{41448}$ con cui l'operazione è verificata.

$$\text{II } F = 0,5333\ldots\ldots = \frac{53-5}{\text{b}\,0} = \left(\frac{4\text{a}}{\text{b}\,0}\right)_{12} = \left(\frac{58}{132}\right)_{10}$$

$$\text{infatti } F = \frac{5}{12} + \frac{3}{12^2} + \frac{3}{12^3} + \frac{3}{12^4} + \ldots\ldots = \frac{5}{12} + \frac{3}{12^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{12}} =$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{3}{12^2-12} = \frac{5(12-1)+3}{12(12-1)} = \frac{58}{132}$$

---

*) Q l'antiperiodo è un numero in generale di m cifre significative; $Q.b^n$ è quel numero che si ottiene ponendo alla destra di Q tanti (n) zeri quante sono le cifre del periodo (π); quindi $Qb^n + \pi$ è finalmente quel numero che dal precedente Qb^n si ottiene, sostituendo agli n zeri, ora scritti alla sua destra, il periodo π stesso; è adunque evidente che $Qb^n + \pi$ rappresenta precisamente il numero formato dalle cifre dell'antiperiodo seguite a destra da quelle del 1° periodo.

$$\text{III } F = 0{,}641212\ldots\ldots = \frac{6412-64}{bb00} = \left(\frac{636a}{bb00}\right)_{12} = \left(\frac{10882}{20592}\right)_{10} = \left(\frac{5441}{10296}\right)_{10}$$

$$\text{infatti } F = \frac{76}{12^2} + \frac{14}{12^4} + \frac{14}{12^6} + \ldots\ldots = \frac{76}{12^2} + \frac{14}{12^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{12^2}} =$$

$$= \frac{76}{12^2} + \frac{14}{12^4 - 12^2} = \frac{76(12^2-1)+4}{12^2(12^2-1)} = \frac{10882}{20592} = \frac{5441}{10296}$$

ecc. ecc. ecc. ecc.

V. Metodi rapidi per eseguire in alcuni casi particolari delle Moltiplicazioni e Divisioni.

I. Lemma. Ponendo uno, due, tre, ... **r** zeri alla destra d'un numero intero N scritto in base **b**, lo si moltiplica rispettivamente per b, b^2, b^3, ... b^r; e sopprimendo alla destra d'un numero intero N, scritto in quella base, uno, due, tre .... **r** zeri, lo si divide rispettivamente per b, b^2, b^3, ... b^r.

Definizione. Chiameremo *numero radicale* scritto in base **b** un numero frazionario radicale, cioè un numero misto, in cui la parte intera è separata mediante la virgola radicale dalla parte frazionaria, che è una *frazione radicale* (vedi Cap. II).

II. Lemma. Un numero radicale non cambia di valore scrivendo o sopprimendo alla sua destra quanti zeri si vogliano.

Corollario. Scritto un numero intero, le sue unità semplici si possono far seguire dalla virgola radicale e scrivere poi alla sua destra quanti zeri si vogliano senza alterarne il valore, per modo che ogni numero intero può in tal maniera essere facilmente ridotto sotto la forma di numero radicale.

III. Lemma. Trasportando la virgola radicale di uno, due, tre, ... **r** posti verso destra, si moltiplica il numero radicale proposto rispettivamente per **b**, b^2, b^3, ... b^r; e trasportandola rispettivamente di uno, due, tre .... **r** posti verso sinistra lo si divide rispettivamente per **b**, b^2, b^3, ... b^r.

Regola I. Per moltiplicare un numero **N** intero o radicale rispettivamente per **b**, b^2, b^3 .... b^r, basta trasportare la sua virgola radicale rispettivamente di **1, 2, 3** .... **r** posti verso destra.

Regola II. Per dividere un numero **N** intero o radicale rispettivamente per **b**, b^2 b^3, ... b^r, basta trasportare la sua virgola radicale rispettivamente di **1, 2, 3**, ... **r** posti verso sinistra.

Esempî per le applicazioni:

Per moltiplicare un numero **N** intero o radicale scritto in base 12, rispettivamente per 12, 12^2, 12^3, ... 12^r, basta trasportare la virgola rispettivamente di 1, 2, 3, ... **r** posti verso destra ecc. ecc.

Per dividere un numero **N** intero o radicale scritto in base 7, rispettivamente per 7, 7^2, 7^3, ... 7^r, basta trasportare la virgola rispettivamente di 1, 2, 3, ... **r** posti verso sinistra ecc. ecc.

Regola III. Per moltiplicare un numero **N** per (b^r—m), se ne trasporti la virgola radicale di **r** posti verso destra e dal numero così ottenuto si levi il prodotto (m.N).

Esempî. Per moltiplicare un numero **N** scritto in base 12, per (12^3—5), se ne trasporti la virgola radicale di 3 posti verso destra e dal numero ottenuto si levi il quintuplo del moltiplicando **N**.

Per moltiplicare un numero **N** scritto in base 7, per (7^5 — 6), se ne trasporti la virgola radicale di **5** posti verso destra e dal numero ottenuto si levi il sestuplo del moltiplicando **N**.

Per moltiplicare un numero **N** scritto in base 10, per 9999, 9998, 9997, 9996 ecc. se ne trasporti la virgola decimale di **4** posti verso destra e dal numero ottenuto si levi rispettivamente il moltiplicando, il suo doppio, triplo, quadruplo ecc. —

Essendo b = fF, in cui **f** e **F** sono divisori **interi** complementari della base **b**, avremo ancora la seguente

Regola IV. Per moltiplicare un numero **N** per F^m basta trasportarne la virgola radicale di **m** posti verso destra, e dividere il numero così ottenuto per f^m.

Esempî. Per moltiplicare un numero **N** scritto in base 12, per 6^3, basta trasportarne la virgola radicale di **3** posti verso destra e dividere il risultato ottenuto per $2^3 = 8$ ecc. ecc.

Per moltiplicare un numero **N** scritto in base 18, per 9^4, basta trasportarne la virgola radicale di **4** posti verso destra e dividere il risultato ottenuto per 2^4 ecc. ecc.

Per moltiplicare un numero **N** scritto in base 10, per 25, 125, 625, 3125 ecc., se ne trasporti la virgola decimale rispettivamente di 2, 3, 4, 5 ecc. posti verso destra, e si divida il risultato ottenuto rispettivamente per 4, 8, 16, 32 ecc.

Regola V. Per dividere un numero **N** per F^m basta trasportarne la virgola radicale di **m** posti verso sinistra, e moltiplicare il risultato ottenuto per f^m.

Esempî. Per dividere un numero **N** scritto in base 12, per 6^5, basta trasportarne la virgola radicale di **5** posti verso sinistra e moltiplicare il risultato otten uto per 2^5 ecc. ecc.

Per dividere un numero **N** scritto in base 14, per 7^4, basta trasportarne la virgola radicale di **4** posti verso sinistra e moltiplicare il risultato ottenuto per 2^4 ecc. ecc.

Per dividere un numero **N** scritto in base 10, per 25, 125, 625, 3125 ecc., se ne trasporti la virgola decimale rispettivamente di 2, 3, 4, 5 ecc. posti verso sinistra, e si moltiplichi il risultato ottenuto rispettivamente per 4, 8, 16, 32 ecc.

NB. 1) In tutti questi casi si è supposto per le applicazioni $F > f$ ed inoltre che **F** sia molto diverso da **f** per modo che sostituendo nelle operazioni da farsi il numero operatore **f** al numero operatore **F**, le operazioni stesse riescano così realmente semplificate.

2) Si sono ommesse per brevità le dimostrazioni dei lemmi precedenti in questo capitolo, come pure le dimostrazioni delle cinque regole svolte quì sopra, perchè sono del tutto conformi alle analoghe dimostrazioni che si danno nell'aritmetica comune e quindi ne potrebbero essere dedotte colla massima facilità.

3) In conformità a quanto è detto nel corollario al II lemma di questo capitolo, in tutte le regole svolte più sopra per **N** si può intendere, anche laddove ciò non fosse esplicitamente menzionato, tanto un numero intero, quanto un numero radicale qualunque.

VI. Osservazioni generali sul calcolo dei numeri scritti in base b non decimale.

Siccome, riferendoci alla base **b**, ogni **b** unità d'un ordine rappresentano **1** unità dell'ordine immediatamente superiore, ci basterà avere quest'unica avvertenza sia nel calcolo dei numeri interi quanto dei numeri radicali (vedi definizione Cap. V.) nel passaggio dalle unità d'un ordine a quelle dell'ordine immediatamente successivo (sia superiore od inferiore); — il metodo e dirò così la disposizione grafica del calcolo possono conservarsi così come con molta opportunità ci servono nel sistema numerico decimale, come risulta dai seguenti

Esempî scritti in base dodici (a = dieci; b = undici).

Operazioni	Verifiche	Operazioni	Verifiche
Addizione		*Addizione*	
35400	ab9876	3,54	0,782
7820	7820	0,782	3,54
ab9876	35400	ab,9876	12
120000	ba987	12	ab,9876
ba987	120000	b,a987	b,a987
1159661	1159661	115,9661	115,9661

Incomincio a dire 7 e 6 fanno tredici, scrivo 1, porto 1, e 8 fan 9, e 7 fan sedici, e 2 fan diciotto, scrivo 6 e porto 1 ecc. ecc. ed analoghi ragionamenti si fanno pure per tutte le altre operazioni.

Sottrazione		*Sottrazione*	
945ab75	945ab75	ab,9876	ab,9876
6789ab	89a2186	0,782	ab,2056
89a2186	6789ab	ab,2056	0,7820
Moltiplicazione		*Moltiplicazione*	
ab9876	7820	ab,9876	0,782
7820	ab9876	0,782	ab,9876
19b75300	3a100	19b7530	3a10
73a5900	45920	73a5900	4592
64a8046	51540	64a8046	5154
704458b300	59160	70,4458b30	5916
	705a0		705a
	64980		6498
	704458b300		70,4458b30

Divisione

```
704458b300 | 7820
64980      |------
-------      ab9876
 76858
 705a0
-------
  6278b
  59160
-------
   562b3
   51540
-------
    49730
    45920
-------
     3a100
     3a100
-------
     00000
```

```
704458b300 | ab9876
64a8046    |-------
-------      7820
 7585453
 73a5900
-------
  19b7530
  19b7530
-------
  00000000
```

Divisione

```
70,4458b300 | 0,782
64980       |------
-------       ab,9876
 76858
 705a0
-------
  6278b
  59160
-------
   592b3
   51540
-------
    49730
    45920
-------
     3a100
     3a100
-------
     00000
```

```
70,4458b3 | ab,9876
64a8046   |--------
-------     0,782
 7585453
 73a5900
-------
  19b7530
  19b7530
-------
  0000000
```

Innalzamento a potenza

Quadrato

```
7820² = { 41
           94
            54
              268400
          -------------
          4aba8400 }  = 4aba8400
```

```
7820² = 7820 × 7820 = 4aba8400
        -------------
         134400
        51540
       45920
       -------
       4aba8400
```

Quadrato

```
0,782² = { 41
           94
            54
              2684
          -------------
          0,4aba84 }  = 0,4aba84
```

Cubo

```
7820³ = { 247
           820
            940
             368
           25480
                7808000
          -------------
          3190bb808000 }  = 3190bb808000
```

```
7820³ = 7820² × 7820 = 3190bb808000
        -------------
        4aba8400 × 7820 = 3190bb808000
        -------
         99b948
       333b168
      2a4b2a4
      -------
      3190bb808000
```

Cubo

```
0,782³ = { 247
            820
             940
              360
            25480
                 7808
          -------------
          0,3190bb808 }  = 0,3190bb808
```

Estrazione di radice

Radice quadrata

```
√4aba8400 = 7820
41
9ba : 128 × 8
994
02684 : 1342 × 2
 2684
 000000
```

Verifica

$7820^2 = 4aba8400$

Estrazione di radice

Radice quadrata

```
√0,4aba84 = 0,782
41
9ba
994
 2684
 2684
 0000
```

Verifica

$0,782^2 = 0,4aba84$

Radice cubica

```
∛3190bb808000 = 7820
247
920bb : 103
820
 940
  368
  2553808 : 12840
  25480
     7808
  000000000
```

Verifica

$7820^3 = 3190bb808000$

Radice cubica

```
∛0,3190bb808 = 0,782
247
920bb
820
 940
  368
  2553808
  25480
     7808
  0000000
```

Verifica

$0,782^3 = 0,3190bb808$

Operazioni abbreviate con approssimazione „radicale“ sopra numeri scritti in base dodici

Addizione a meno di 0,01

```
   3,54|
   0,78|2
  ab,98|76
  12
    b,a9|87
 115,97|
```

Sottrazione a meno di 0,01

```
ab,98|76
 0,78|2
ab,20|
```

Moltiplicazione a meno di 0,001

```
ab,9876 × 0,782 = 70,446
   2870
 64a804
  73a59
   19b7
 70,4458
```

Divisione a meno di 0,01

```
70,4458b3 : 0,782 = ab,99
6498        ab,987
 7685
 705a
  6278
  5916
   562
   515
    49
    45
     4
```

Radice quadrata a meno di 0,01

$\sqrt{0,4a|ba|84} = 0,78$

```
41
 9ba
 994
  26
```

Radice cubica a meno di 0,01

$\sqrt[3]{0,319|0bb|808} = 0,78$

```
247
 920bb
 820
  940
   368
  2553
```

NB. Ho scelto per amor di semplicità quasi sempre gli stessi numeri su cui operare, ma ciò non nuoce evidentemente alla generalità dell'esposizione.

In quanto alle operazioni approssimate con approssimazione radicale giova quì ripetere che valgono per esse, in qualunque sistema numerico si effettuino, le medesime avvertenze che si hanno relativamente ad esse nel calcolo consueto con numeri decimali; è per questo che non ho creduto di dover scegliere appositi esempî complicati p. es. sull'estrazione approssimata della radice quadrata e cubica, in quanto che per tutti i riguardi il metodo con cui si effettuano tali operazioni coinciderebbe con quello usato nel sistema numerico decimale. Ho scelto poi di preferenza nei numeri scritti il sistema duodecimale, come quello che maggiormente si raccomanda nelle pratiche applicazioni, alcune delle quali si vedranno anche nel corso del lavoro stesso.

VII. Complemento aritmetico.

Essendo $b^r < N < b^{r+1}$; per „complemento aritmetico di **N** in base **b**" s'intende la differenza $b^{r+1} - N$, differenza che in pratica si ottiene molto comodamente e serve come nell'aritmetica decimale a sostituire una vera somma aritmetica ad una somma algebrica data.

Riferendoci anche quì per maggior brevità unicamente al sistema *duodecimale;* ecco come si presentano i calcoli relativi e vediamo anche quì riapparire fedelmente la disposizione grafica dei calcoli corrispondenti dell'aritmetica comune e decimale.

Il complemento	aritmetico	di	7385	è	4867;	infatti	7385 + 4837 =	10000
id.	id.		49b	è	721;	id.	49b + 721 =	1000
id.	id.		ab987	è	10235;	id.	ab987 + 10235 =	100000
id.	id.		6b	è	51;	id.	6b + 51 =	100
id.	id.		4	è	8;	id.	4 + 8 =	10

Onde alla somma algebrica

$$\left\{\begin{array}{r} +\ 57952 \\ -\ 7385 \\ -\ 49b \\ +\ 112385 \\ -\ ab987 \\ -\ 6b \\ -\ 4 \end{array}\right\}$$

si può sostituire la somma aritmetica:

$$\left\{\begin{array}{r} +\ 57952 \\ +\ \overline{1}4837 \\ +\ \overline{1}721 \\ +\ 112385 \\ +\ \overline{1}10235 \\ +\ \overline{1}51 \\ +\ \overline{1}8 \end{array}\right\} = 72635$$

Infatti abbiamo:

57952 — 7385 — 49b +
+ 112385 — ab987 — 6b — 4 =
= (57952 + 112385) — (7385 +
+ 49b + ab987 + 6b + 4) =
= 16a117 — b76a2 =
= 72635 come prima

VIII. Passaggio da un sistema di numerazione ad altro sistema di numerazione.

Un numero qualunque **N** può esser sempre espresso mediante l'equazione seguente: $N = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + c_3 b^3 + \ldots + c_m b^m$: in cui **b** è detto „base del sistema di numerazione" $c_0, c_1, c_2 \ldots c_m$ sono dette „cifre" del numero **N** scritto in base **b**; è chiaro che variando la base **b** lo stesso numero **N** non potrà più essere scritto colle medesime cifre, varieranno adunque conseguentemente anche queste cifre al variare della base. A tale proposito possiamo ora proporci i problemi seguenti, servendoci dapprima del sistema numerico decimale come sistema ausiliario e trattando poi le questioni indipendentemente da tale sistema intermediario:

Problema I: Dato un numero N scritto in base 10, tradurlo in un altra base data b. Giova notare sin da questo punto che se la nuova base è minore di 10 ci basteranno le nostre consuete cifre „arabiche" conservando a ciascuna d'esse il suo valore originale; che se invece **b** fosse maggiore di 10 ci sarebbe la necessità d'introdurre delle nuove cifre; ed in queste pagine adotteremo le seguenti: a = 10; b = 11; c = 12; d = 13; e = 14; f = 15; g = 16; h = 17; i = 18 ecc. ecc.; beninteso che anche in questi sistemi differenti ogni cifra ha come nell'aritmetica ordinario un valore „assoluto" ed un valore „relativo".

Il presente problema si riduce a trovare le quantità $c_0, c_1, c_2, \ldots c_m$ dalla seguente equazione (1) in cui le $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_m$ rappresentano le cifre date del numero **N** scritto in base 10:

$$(1)\quad N = \gamma_m 10^m + \gamma_{m-1} 10^{m-1} + \gamma_{m-2} 10^{m-2} + \ldots + \gamma_2 \cdot 10^2 + \gamma_1 \cdot 10 + \gamma_0 = \\ = c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + c_{m-2} b^{m-2} + \ldots + c_2 b^2 + c_1 b + c_0$$

da cui anzitutto si deduce essere c_0 il resto della divisione (2); ed analogamente si ricavano le altre cifre c_1 c_2 .... dei resti delle divisioni successive alla (2)

N	$:b = Q^{I}$	$+ \frac{r_0}{b}$ (2)		N	$= bQ^{I}$	$+ r_0$	con cui si ha	c_0	$= r_0$
Q^{I}	$:b = Q^{II}$	$+ \frac{r_1}{b}$	dalle	Q^{I}	$= bQ^{II}$	$+ r_1$	id. id.	c_1	$= r_1$
Q^{II}	$:b = Q^{III}$	$+ \frac{r_4}{b}$	quali	Q^{II}	$= bQ^{III}$	$+ r_2$	id. id.	c_2	$= r_2$
—	— — —	— —	si ha	—	— — —	— — —	— — —	—	— —
$Q^{(m-1)}$	$:b = Q^{(m)}$	$+ \frac{r_{m-1}}{b}$	ancora	$Q^{(m-1)}$	$= bQ^{(m)}$	$+ r_{m-1}$	id. id.	c_{m-1}	$= r_{m-1}$
$Q^{(m)}$	$:b = 0$	$+ \frac{r_m}{b}$		$Q^{(m)}$	$= 0$	$+ r_m$	id. id.	c_m	$= r_m = Q^{(m)}$

I polinomî $Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, \ldots Q^{(m)}$ sono tutti ordinati secondo le potenze discendenti della base dieci e diminuiscono successivamente ciascuno il loro grado di una unità, per cui $Q^{(m-1)}$ sarà lineare rispetto alla base dieci; e col mezzo di tali polinomî si trovano rispettivamente i valori di $c_1, c_2, \ldots c_m$ precisamente come mediante **N** si trovò c_0, cioè: i valori di quelle cifre risulteranno quali resti delle rispettive divisioni (come si vede nel quadro quì sopra).

Infatti per mezzo di successive sostituzioni ricorrenti si ottiene dal sistema delle precedenti equazioni $N = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + r_3 b^3 + r_4 b^4 + \ldots + r_m b^m$; da cui immediatamente con necessità si conclude essere: $c_0 = r_0$; $c_1 = r_1$; $c_2 = r_2$; $c_3 = r_3$; $c_4 = r_4$; ..... $c_m = r_m$ come si voleva dimostrare, con che si è risolto il problema.

Esempî per l' applicazione:

I. $(7389)_{10} = (54113)_6$

Infatti 7389 : 6

Q^{I}	$= 1231$	$r_0 = 3$
Q^{II}	$= 205$	$r_1 = 1$
Q^{III}	$= 34$	$r_2 = 1$
Q^{IV}	$= 5$	$r_3 = 4$
Q^{V}	$= 0$	$r_4 = 5$

II. $(7389)_{10} = (4339)_{12}$

Infatti 7389 : 12

Q^{I}	$= 615$	$r_0 = 9$
Q^{II}	$= 51$	$r_1 = 3$
Q^{III}	$= 4$	$r_2 = 3$
Q^{IV}	$= 0$	$r_3 = 4$
	ecc.	ecc.

Problema II: Dato un numero scritto in base b, tradurlo in base 10 (inverso al precedente). È inverso al precedente in quanto che in questo problema son date le $c_0, c_1, c_2 \ldots c_m$ e si cercano invece le $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$. Per la loro determinazione serve ancora l'equazione:

$$\gamma_m 10^m + \gamma_{m-1} 10^{m-1} + \gamma_{m-2} 10^{m-2} + \ldots + \gamma_2 10^2 + \gamma_1 10 + \gamma_0 =$$
$$= c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + c_{m-2} b^{m-2} + \ldots + c_2 b^2 + c_1 b + c_0;$$

ed è chiaro che si potrebbero ricavare con un procedimento affatto analogo a quello adoperato nel problema precedente, cioè quali resti delle seguenti successive divisioni, nelle quali si suppongono tutte le grandezze scritte in base b; per ottenere poi le cifre effettive dobbiamo ridurre i rispettivi resti tutti alla base 10:

$$\left.\begin{array}{l} N : 10 = Q^{I} + \dfrac{r_0}{10} \\ Q^{I} : 10 = Q^{II} + \dfrac{r_1}{10} \\ Q^{II} : 10 = Q^{III} + \dfrac{r_2}{10} \\ \text{— — — — — —} \\ Q^{(m-1)} : 10 = Q^{(m)} + \dfrac{r_{m-1}}{10} \\ Q^{(m)} : 10 = 0 + \dfrac{r_m}{10} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{dalle} \\ \text{quali} \\ \text{si ha} \\ \text{pure} \end{array} \left\{\begin{array}{l} N = 10 Q^{I} + r_0 \text{ da cui } r_0 = \gamma_0 \\ Q^{I} = 10 Q^{II} + r_1 \text{ id. } r_1 = \gamma_1 \\ Q^{II} = 10 Q^{III} + r_2 \text{ id. } r_2 = \gamma_2 \\ \text{— — — — — — — — —} \\ Q^{(m-1)} = 10 . Q^{(m)} + r_{m-1} \text{ id. } r_{m-1} = \gamma_{m-1} \\ Q^{(m)} = 0 + r_m \text{ id. } r_m = \gamma_m \end{array}\right.$$

Ma otteniamo le cifre $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_m$ più comodamente, valutando effettivamente le successive potenze di b (in base 10); calcolando pure in base 10 i prodotti della forma $c_r b^r$ e finalmente la somma (sempre in base 10) di tutti questi prodotti. Il calcolo si dispone però preferibilmente come negli esempi che seguono:

Esempio I:

$(54113)_6 = (7389)_{10}$ Infatti: $(54113)_6$

$$\begin{array}{r} 6 \times 5 \\ \hline 34 \\ \hline 205 \\ \hline 1231 \\ \hline 7389 \end{array}$$

Esempio II:

$(4339)_{12} = (7389)_{10}$

Infatti: $(4339)_{12}$

$$\begin{array}{r} 12 \times 4 \\ \hline 51 \\ \hline 615 \\ \hline 7389 \end{array}$$

Col 1° metodo il calcolo si presenterebbe come segue:

Esempio I:

$(54113)_6 : (14)_6$

$Q^{I} = 3230$	$r_0 = (13)_6 = 9$	dunque anche di quì si ricava
$Q^{II} = 201$	$r_1 = (12)_6 = 8$	$(54113)_6 = (7389)_{10}$
$Q^{III} = 11$	$r_2 = (3)_6 = 3$	
$Q^{IV} = 0$	$r_3 = (11)_6 = 7$	

Esempio II:

$(4339)_{12} : a_{12}$

$Q^{I} = 516$	$r_0 = 9$	da cui si ricava
$Q^{II} = 61$	$r_1 = 8$	$(4339)_{12} = (7389)_{10}$
$Q^{III} = 7$	$r_2 = 3$	
$Q^{IV} = 0$	$r_3 = 7$	

Problema III: Dato un numero scritto in base b_1, tradurlo in base b_2. (Con e senza passaggio per la base 10).

Metodo 1°. È facile vedere come si possa risolvere questo problema ricorrendo ai 2 precedenti, vale a dire all'uso della base intermediaria 10; per far ciò, il numero scritto in base b_1 si ridurrà alla base 10 ed il numero così ottenuto si riduce poi alla base b_2.

Esempio: $(54113)_6 = (4339)_{12}$

Infatti come si vide prima si hanno le seguenti: $\left\{ \begin{array}{l} (54113)_6 = (7389)_{10} \\ (7389)_{10} = (4339)_{12} \end{array} \right.$ Quindi: $(54113)_6 = (4339)$ q. e. d.

Metodo 2°. Non è poi nemmeno difficile il risolvere il problema proposto anche senza ricorrere alla base ausiliaria 10; poichè si potrebbe benissimo trattarlo con perfetta analogia ai precedenti ed ecco come: Si facciano le seguenti operazioni scrivendo i numeri tutti in base b_1, e si riducano poi i rispettivi resti tutti in base b_2.

$$N : b_2 = Q^{I} + \frac{r_0}{b_2}$$

$$Q^{I} : b_2 = Q^{II} + \frac{r_1}{b_2}$$

$$Q^{II} : b_2 + Q^{III} + \frac{r_2}{b_2}$$

— — — — —

$$Q^{(m-1)} : b_2 = Q^{(m)} + \frac{r_{m-1}}{b_2}$$

$$Q^{(m)} : b_2 = 0 + \frac{r_m}{b_2}$$

E si avranno per le ragioni più volte esposte chiamando con $c_0^{I}, c_1^{I}, c_2^{I}, c_3^{I} \ldots c_m^{I}$ le cifre del numero N scritto in base b_1; e con $c_0^{II}, c_1^{II}, c_2^{II}, c_3^{II} \ldots c_m^{II}$ le cifre dello stesso numero scritto in base b_2, le seguenti relazioni che risolvono direttamente il problema

$$(r_0)_{b_1} = (c_0^{II})_{b_2};\ (r_1)_{b_1} = (c_1^{II})_{b_2};\ (r_2)_{b_1} = (c_2^{II})_{b_2};$$
$$\ldots (r_m)_{b_1} = (c_m^{II})_{b_2}$$

Esempî: I. $(54113)_6 = (4339)_{12}$

Infatti $(54113)_6 : (20)_6$

$Q^{I} = 2503 \quad r_0 = (13)_6 = (9)_{12}$

$Q^{II} = 123 \quad r_1 = (3)_6 = (3)_{12}$

$Q^{III} = 4 \quad r_2 = (3)_6 = (3)_{12}$

$Q^{IV} = 0 \quad r_3 = (4)_6 = (4)_{12}$

quindi $(54113)_6 = (4339)_{12}$

II. $(4339)_{12} = : (54113)_6$

Infatti $(4339)_{12}$ $(6)_{12}$

$Q^{I} = 867 \quad r_0 = (3)_{12} = (3)_6$

$Q^{II} = 151 \quad r_1 = (1)_{12} = (1)_6$

$Q^{III} = 2a \quad r_2 = (1)_{12} = (1)_6$

$Q^{IV} = 5 \quad r_3 = (4)_{12} = (4)_6$

$Q^{V} = 0 \quad r_4 = (5)_{12} = (5)_6$

Metodo 3°. Ancora senza bisogno del sistema ausiliario decimale si può risolvere il presente problema anche analogamente al 2° metodo adoperato per risolvere il problema II ed ecco come:

Valutiamo le effettive potenze di b_1 (in base b_2); calcoliamo pure in base b_2 i prodotti analoghi a $c_r^{I}\, b_1^{\,r}$ di cui N è la somma e finalmente questa somma s'essa sempre in base b_2. Il calcolo si disporrebbe preferibilmente come nei seguenti

Esempî:

I. $(54113)_6 = (4339)_{12}$

Infatti $(54113)_6$

$(6)_{12} \times (5)_{12}$

$(2a)_{12}$

$(151)_{12}$

$(867)_{12}$

$(4339)_{12}$

Dunque è proprio $(54113)_6 = (4339)_{12}$

II. $(4339)_{12} = (54113)_6$

Infatti $(4339)_{12}$

$(20)_6 \times (4)_6$

$(123)_6$

$(2503)_6$

$(54113)_6$

Dunque è proprio $(4339)_{12} = (54113)_6$ ecc. ecc.

Problema IV: Dato un numero N scritto in una data base **b**, *trovare in qual base* **x** *esso verrebbe scritto in una certa maniera data (cioè con certe cifre date).*

Sia dato $N = c_m\, b^m + c_{m-1}\, b^{m-1} + c_{m-2}\, b^{m-2} + \ldots + c_3\, b^3 + c_2\, b^2 + c_1\, b + c_0$; e sieno pur **date**

le quantità $\gamma_m \quad \gamma_{m-1} \quad \gamma_{m-2} \quad \gamma_3 \quad \gamma_2 \quad \gamma_1 \quad \gamma_0$

quali „cifre" di **N** scritto nella base **x**. Allora si ha la seguente equazione:

$$\gamma_m\, x^m + \gamma_{m-1}\, x^{m-1} + \gamma_{m-2}\, x^{m-2} + \ldots + \gamma_3\, x^3 + \gamma_2\, x^2 + \gamma_1\, x + \gamma_0 = N$$

da cui si deve trovare **x**; ma il problema si vede essere ridotto ad un'equazione completa di m° grado la quale non si può risolvere nella sua piena generalità: è però solubile in ogni caso numerico particolare.

Esempî: 1°. Si domanda in qual sistema numerico il numero $(7389)_{10}$ sarebbe scritto colle cifre $\gamma_3 = 4$; $\gamma_2 = 3$; $\gamma_1 = 3$; $\gamma_0 = 9$. Dobbiamo quindi risolvere la seguente equazione cubica

$$4\,x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 9 = 7389$$

$$4\,x^3 + 3\,x^2 + 3\,x - 7380 = 0$$

12)	4	51	615	0
	4	99	1813	
	4	147		

dalla quale si ha **x = 12** quale unica radice reale intera mentre le altre 2 sono immaginarie.

Il sistema domandato è adunque il sistema **duodecimale** cioè quello a base 12.

Infatti: la trasformata in $x - 12 = x_1$ sarebbe $4\,x_1^{\,3} + 147\,x_1^{\,2} + 1813\,x_1 = 0$ da cui si deduce $x_1 = 0$ onde $x = 12$ ed inoltre dividendo per x_1; $4\,x_1^{\,2} + 147\,x_1 + 1813 = 0$, le cui radici non sono reali, essendo $147^2 < 16 . 1813$,

2°. In qual sistema numerico il numerico $(7389)_{10}$ si scrive colle cifre $\gamma_4 = 5$ $\gamma_3 = 4$; $\gamma_2 = 1$; $\gamma_1 = 1$; $\gamma_0 = 3$? Dobbiamo quindi risolvere la seguente equazione:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 5x^4 + & 4x^3 + & x^2 + & x + 3 & = 7389 \\
6) & 5x^4 + & 4x^3 + & x^2 + & x - 7386 & = 0 \\
\hline
 & 5 & 4 & 1 & 1 - 7386 & \\
 & 5 & 34 & 215 & 1291 & 0 \\
 & 5 & 64 & 599 & 4845 & \\
 & 5 & 94 & 1163 & & \\
 & 5 & 124 & & &
\end{array}
$$

la cui trasformata in $(x - 6) = x_1$ sarebbe la seguente $5x_1^4 + 124x_1^3 + 1163x_1^2 + 4845\,x_1 = 0$ da cui si ha $x_1 = 0$ onde $x = 6$ ed inoltre dividendo per x_1 la cubica $5\,x_1^3 + 124\,x_1^2 + 1163\,x_1 + 4845 = 0$, la quale per lo meno non ha più nessuna radice positiva; il sistema domandato è adunque il sistema senario cioè quello a base 6.

IX. Tavola dei quadrati

dei primi dodici numeri scritti in diversi sistemi di numerazione.

n	Quadrato di n scritto nella base										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	100	11	10	4	4	4	4	4	4	4	4
3	1001	100	21	14	13	12	11	10	9	9	9
4	10000	121	100	31	24	22	20	17	16	15	14
5	11001	221	121	100	41	34	31	27	25	23	21
6	100100	1100	210	121	100	51	44	40	36	33	30
7	110001	1211	301	144	121	100	61	54	49	45	41
8	1000000	2101	1000	224	144	121	100	71	64	59	54
9	1010001	10000	1101	311	213	144	121	100	81	74	69
10	1100100	10201	1210	400	254	202	144	121	100	91	84
11	1111001	11111	1321	441	321	232	171	144	121	100	a1
12	10010000	12100	2100	1034	400	264	220	170	144	121	100

X. Tavola dei cubi

dei primi dodici numeri scritti in diversi sistemi.

n	Cubo di n scritto nella base										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1000	22	20	13	12	11	10	8	8	8	8
3	11011	1000	123	102	43	36	33	30	27	25	23
4	1000000	2101	1000	224	144	121	100	71	64	59	54
5	1011111	11122	1331	1000	325	236	175	148	125	104	a5
6	11011000	22000	3120	1331	1000	426	330	260	216	187	160
7	101010111	110201	11113	2333	1331	1000	527	421	343	292	247
8	1000000000	200222	20000	4022	2412	1331	1000	628	512	426	368
9	1011011001	1000000	23121	10404	3213	2061	1331	1000	729	603	509
10	1111101000	1101001	33220	13000	4344	2626	1750	1331	1000	82a	6b4
11	10100110011	1211022	110303	20311	10055	3611	2463	1738	1331	1000	92b
12	11011000000	2101000	123000	41403	12000	5016	3300	2330	1728	1331	1000

XI. Tavola dei numeri primi da 1 a 500.

I. Nel sistema senario.

1	2	3	5	11	15	21	25	31	35	45	51
101	105	111	115	125	135	141	151	155	201	211	215
225	241	245	251	255	301	305	331	335	345	351	405
411	421	431	435	445	455	501	515	521	525	531	551
1011	1015	1021	1025	1035	1041	1055	1105	1115	1125	1131	1141
1145	1151	1205	1231	1235	1241	1245	1311	1321	1335	1341	1345
1355	1411	1421	1431	1435	1445	1501	1505	1521	1535	1541	1555
2001	2011	2015	2025	2041	2045	2051	2055	2115	2131	2135	2151

II. Nel sistema duodecimale.

1	2	3	5	7	b	11	15	17	1b	25	27
31	35	37	3b	45	4b	51	57	5b	61	67	6b
75	81	85	87	8b	91	95	a7	ab	b5	b7	105
107	111	117	11b	125	12b	131	13b	141	145	147	157
167	16b	171	175	17b	181	18b	195	19b	1a5	1a7	1b1
1b5	1b7	205	217	21b	221	225	237	241	24b	251	255
25b	267	271	277	27b	285	291	295	2a1	2ab	2b1	2bb
301	307	30b	315	321	325	327	32b	33b	347	34b	357

XII. Osservazioni sulle Tavole precedenti

che concernono i quadrati ed i cubi dei numeri ed i numeri primi.

Tavola I. Dei quadrati.

Nel sistema numerico decimale sappiamo che il quadrato d'un numero intero non può terminare nè per 2, nè per 3, nè per 7, nè per 8; e che adunque affinchè un numero intero scritto in questo sistema sia quadrato, è *necessario* che finisca per una delle seguenti sei cifre: 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Confrontando però i varî modi con cui si presentano i quadrati dei numeri a seconda che sieno scritti in un sistema numerico piuttosto che in un altro osserviamo quanto segue:

Nei sistemi a base **2**, **3** e **4** i quadrati finiscono tutti o per 0 o per 1; sono escluse quindi le cifre **2** e **3**

Nel sistema a base **5** i quadrati finiscono tutti per 0, 1, 4, sono escluse quindi le cifre **2** e **3**

id. id. **6** id. id. 0, 1, 3, 4, sono escluse quindi le cifre **2** e **5**

Nel sistema a base **7** i quadrati finiscono tutti per 0, 1, 2, 4, sono escluse quindi le cifre **3, 5** e **6**

id. id. **8** id. id. 0, 1, 4, sono escluse quindi le cifre **2, 3, 5, 6, 7**

id. id. **9** id. id. 0, 1, 4, 7, sono escluse quindi le cifre **2, 3, 5, 6, 8**

id. id. **10** id. id. 0, 1, 4, 5, 6, 9, sono escluse quindi le cifre **2, 3, 7, 8**

id. id. **11** id. id. 0, 1, 3, 4, 5, 9, sono escluse quindi le cifre **2, 6, 7, 8, a**

id. id. **12** id. id. 0, 1, 4, 9, sono escluse quindi le cifre **2, 3, 5, 6, 7, 8, a, b**

Da questo raffronto risulta essere il sistema duodecimale il più conveniente tra i sistemi di numerazione qui considerati per riconoscere, se un numero intero proposto possa essere quadrato d'un altro numero in quanto che possiamo affermare che in questo sistema il quadrato d'un numero termina *necessariamente* per una delle seguenti *quattro* cifre: 0, 1, 4, 9, e si escludono quindi le altre otto; questo vale anche per il quadrato d'un numero qualunque. Poichè è ben vero che ciò non è direttamente comprovato nella tavola che pei primi dodici numeri, ma è pur vero che un altro numero qualunque $N > 12$, potendo esser decomposto nelle sue „dozzine" e nelle sue „unità semplici" ponendolo sotto la forma $N = (m.12 + n)$ in cui $n < 12$, ne viene che le unità semplici di N^2 non possono provenire che dalle unità semplici di n^2, e quindi N^2 non può terminare che per una delle cifre 0, 1, 4, 9 come n^2.

Da un'ulteriore ispezione della tavola risulta ancora una certa disposizione simmetrica delle cifre rappresentanti le unità semplici di questi quadrati; tale simmetria si spiega dal fatto che $\left(\frac{b}{2} - r\right)^2$ e $\left(\frac{b}{2} + r\right)^2$ essendo **b** pari per $r \leqq \frac{b}{2}$ si scrivono colla stessa cifra nelle unità semplici come r^2; da cui segue adunque p. es. che per $b = 12$; si ha $\left(\frac{b}{2} - 5\right)^2 = 1$ e $\left(\frac{b}{2} + 5\right)^2 = 101$; $\left(\frac{b}{2} - 3\right)^2 = 9$ e $\left(\frac{b}{2} = 3\right)^2 = 69$ ecc.; e d'altronde essendo **b** qualunque si ha che $(b - r)^2$ e $(b + r)^2$ per $r \leqq b$ si scrivono pure colla stessa cifra nelle unità semplici come r^2; così abbiamo p. es. nel sistema a base $b = 11$; $(b - 2)^2 = 74$ e $(b + 2)^2 = 144$; $(b - 1)^2 = 91$ e $(b + 1)^2 = 121$. Nel sistema a base 8; $(b + 3)^2 = 171$ e $(b - 3)^2 = 31$; $(b + 4)^2 = 220$ e $(b - 4)^2 = 20$.

Inoltre osserviamo che in tutti i sistemi b^2 si scrive 100; a partire dal sistema ternario in tutti i sistemi $(b + 1)^2$ si scrive 121; a partire dal sistema a base $b = 5$ in tutti i sistemi $(b + 2)^2$ si scrive 144 e $(2b + 1)^2$ si scrive 441; a partire dal sistema a base 10 in tutti i sistemi $(b + 3)^2$ si scrive 169 e $(3b + 1)^2$ si scrive 961; i tutti i sistemi $(b - 1)^2$ si scrive con 2 cifre: quella al posto delle unità è 1 e l'altra a sua sinistra è $(b - 2)$; in tutti i sistemi a partire dal sistema a base $b = 4$ $(b - 2)^2$ si scrive con due cifre: quella al posto delle unità è 4, e l'altra è $(b - 4)$; in tutti i sistemi a partire dal sistema decimale $(b - 3)^2$ si scrive con due cifre: **9** al posto delle unità e $(b - 6)$ alla sua sinistra ecc. ecc.

Altre analogie si troverebbero ancora estendendo un pò la tavola a numeri $n > 12$ e per basi $b > 12$; quì se ne sono fatte notare quelle soltanto che maggiormente saltano agli occhi.

Tavola II. Dei cubi.

Nel sistema numerico decimale sappiamo che il cubo d'un numero intero può terminare per una qualunque delle 10 cifre di cui il sistema stesso dispone, cioè per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0,; per modo che in questo sistema non si può giudicare dalla cifra al posto delle unità semplici, se un numero proposto possa o meno essere cubo d'un altro numero.

Consultando poi la nostra tavola vediamo che lo stesso si verifica anche pei sistemi a base $b = 2, 3, 5, 6, 10, 11$ cioè in tutti questi ultimi sistemi il cubo d'un numero può terminare per una cifra qualunque al posto delle unità e tale cifra non dà quindi nessun indizio per riconoscere, se un numero proposto possa o meno essere cubo d'un altro numero. Osservando invece i cubi scritti nei sistemi d'altra base troviamo quanto segue:

Nel sistema a base	**4**	i cubi finiscono	tutti per	0, per 1, o per 3	è esclusa quindi la cifra **2**
id.	id.	**7**	id.	id.	0, 1, 6	sono escluse quindi le cifre **2, 3, 4, 5**
id.	id.	**8**	id.	id.	0, 1, 3, 5, 7	sono escluse quindi le cifre **2, 4, 6**
id.	id.	**9**	id.	id.	0, 1, 8	sono escluse quindi le cifre **2, 3, 4, 5, 6, 7**
id.	id.	**12**	id.	id.	qualunque cifra salvo le cifre **2** ed **a**.	

Vediamo adunque che scrivendo i numeri in uno dei sistemi a base $b = 4, 7, 8, 9, 12$ anche pei cubi si possono stabilire dei criterî, dirò così di riconoscimento, analogamente a quanto si trovò nella tavola dei quadrati; voglio dire che in questi sistemi si può pure riconoscere dalla cifra al posto delle unità d'un numero proposto se quel numero possa o meno essere cubo d'un altro numero. A tale proposito osserviamo che per questa ricerca i sistemi di numerazione più convenienti fra i sistemi presi in considerazione sarebbero quelli a base $b = 7$ e $b = 9$ e quest'ultimo poi il più conveniente fra tutti i sistemi suddetti, in quanto che possiamo affermare che in questo sistema il cubo d'un numero termina necessariamente per una delle tre cifre seguenti 0, 1, 8. Anche quì possiamo enunciare tale verità in tesi generale per il cubo d'un numero qualunque per ragioni affatto analoghe a quelle che ci permisero di giungere a simile conclusione relativamente al quadrato d'un numero qualunque; anche quì essendo $N = (m . 9 + n)$ ed $n < 9$ è evidente che N^3 ed n^3 si scrivono colla medesima cifra al posto delle unità.

Confrontando poi tra loro le due tavole si osservano dei quadrati nell'una che si scrivono come dei cubi nell'altra p. es.:

per $b = 2$	troviamo il	quadrato di otto	=	1000000	ed il	cubo di quattro	=	1000000
per $b = 3$	id.	id.	=	2101	id.	id.	=	2101
per $b = 4$	id.	id.	=	1000	id.	id.	=	1000
per $b = 5$	id.	id.	=	224	id.	id.	=	224
per $b = 6$	id.	id.	=	144	id.	id.	=	144
per $b = 7$	id.	id.	=	121	id.	id.	=	121
per $b = 8$	id.	id.	=	100	id.	id.	=	100

e così avviene in tutti gli altri sistemi per il quadrato di otto e per il cubo di quattro, il che si spiega dal fatto che $(2^2)^3 = (2^3)^2$, relazione affatto indipendente dalla scelta della base. Ma cio si verificherebbe naturalmente per tutti i numeri $(n = a^3)$ nella tavola dei quadrati, e pei numeri $(n = a^2)$ nella tavola dei cubi, essendo in generale $(a^2)^3 = (a^3)^2$.

Da un'ulteriore ispezione della tavola dei cubi ci risulta ancora un fatto che si spiega dal teorema seguente di facilissima dimostrazione: In un sistema di numerazione a base b i numeri $(b - r)^3$ e $(b + r)^3$ per $r \leqq b$ terminano o per zero o per cifre „complementari" vale a dire tali che l'una è il complemento aritmetico dell'altra (vedi cap. VII); lo stesso avviene pure dei numeri $(mb - r)^3$ ed $(mb + r)^3$ per m intero ed $r \leqq b$; avviene ancora, essendo $\beta = \frac{b}{9}$ = numero intero, dei numeri $\left(\frac{b}{3} - r\right)^3$ e $\left(\frac{b}{3} + r\right)^3$ per $\left(r \leqq \frac{b}{3}\right)$, e finalmente anche dei numeri $\left(\frac{2b}{3} - r\right)^3$ e $\left(\frac{2b}{3} + r\right)^3$ per $r \leqq \frac{2b}{3}$: Infatti:

$$\left.\begin{array}{lllll} (b-r)^3 & = b^3 & -3rb^2 & +3r^2b & -r^3 \\ (b+r)^3 & = b^3 & +3rb^2 & +3r^2b & +r^3 \end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{lllll} (mb-r)^3 & = m^3b^3 & -3m^2rb^2 & +3mr^2b & -r^3 \\ (mb+r)^3 & = m^3b^3 & +3m^2rb^2 & +3mr^2b & +r^3 \end{array}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{Essendo } \beta = \frac{b}{9} = \text{num. int.} & \left(\frac{b}{3} - r\right)^3 & = 3\beta^2b & -3\beta rb & +r^2b & -r^3 \\ \text{id.} \quad \text{id.} & \left(\frac{b}{3} + r\right)^3 & = 3\beta^2b & +3\beta rb & +r^2b & +r^3 \end{array}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{id.} \quad \text{id.} & \left(\frac{2b}{3} - r\right)^3 & = 24\beta^2b & -12\beta rb & +2r^2b & -r^3 \\ \text{id.} \quad \text{id.} & \left(\frac{2b}{3} + r\right)^3 & = 24\beta^2b & +12\beta rb & +2r^2b & +r^3 \end{array}\right\} (4)$$

Che questi numeri terminino a 2 a 2 rispettivamente o per zero o per cifre complementari risulta dal fatto, che sommandoli a 2 a 2 s'ottengono dei multipli di b il che dimostra appunto il teorema come segue: Chiamando con ρ_1 e ρ_2 rispettivamente le cifre al posto delle unità nei 2 numeri considerati N_1 e N_2, e se si ha $N_1 = n_1 b + \rho_1$ e $N_2 = n_2 b + \rho_2$; essendo $0 < \rho_1 < b$, $0 < \rho_2 < b$ sarà $0 < \rho_1 + \rho_2 < 2b$ (1); se quindi si ha $N_1 + N_2 = mb$, sarà *necessariamente* $\rho_1 + \rho_2 = nb$ (2) la quale è incompatibile con (1) ove non sia $\rho_1 + \rho_2 = b$, il che significa che le cifre ρ_1 e ρ_2 sono l'una il complemento aritmetico dell'altra; chè se $\rho_1 = 0$, sarà anche $\rho_2 = 0$, altrimenti non sussisterebbe la $N_1 + N_2 = mb$, come si voleva dimostrare.

In relazione a questo teorema troviamo nella tavola dei cubi per $b = 5$, $(2b - 2)^3 = 4022$, $(2b + 2)^3 = 23403$ essendo $2 + 3 =$ **base**; per $b = 11$, $(b - 1)^3 = 82a$; $(b + 1)^3 = 1331$ essendo $a + 1 =$ **base** ecc. ecc.

Per $b = 9$ si ha $\left(\frac{b}{3} - 1\right)^3 = 8$, $\left(\frac{b}{3} + 1\right)^3 = 71$ essendo $8 + 1 =$ **base**

Per $b = 9$ si ha $\left(\frac{2b}{3} - 3\right)^3 = 30$, e $\left(\frac{2b}{3} + 3\right)^3 = 1000$ essendo $8 + 1 =$ **base**

Per $b = 9$ si ha $\left(\frac{2b}{3} - 4\right)^3 = 8$; $\left(\frac{2b}{3} + 4\right)^3 = 1331$ essendo $8 + 1 =$ base.

Lo stesso si verificherebbe naturalmente anche per $b = 18$, 27, 36 ecc. ed in generale per qualunque base multipla del 9.

Inoltre osserviamo che in tutti i sistemi b^3 si scrive 1000
a partire dal sistema a base $b = 4$ in tutti i sistemi $(b + 1)^3$ si scrive 1331
id. id. $b = 4$ id. $(b - 1)^3$ id. con 3 cifre la media delle quali è il **2**, a sua destra c'è la cifra $(b - 1)$ ed alla sinistra $(b - 3)$ ecc.

Anche a proposito di questa tavola si potrebbero facilmente dedurre altre analogie estendendola a numeri $n >$ dodici ed a basi $b >$ dodici e non ne furono presentate che quelle soltanto che erano di maggiore evidenza.

Tavola III e IV. Dei numeri primi.

Già nell'aritmetica comune s'insegna che eccettuati i numeri **2** e **3** i numeri primi sono tutti della forma $(6n \pm 1)$ e lo si dimostra brevemente così: Dividendo un numero intero per 6 non si può ottenere per resto che un numero $r < 6$, per cui i resti possibili sono 0, 1, 2, 3, 4, 5; ora se il dividendo proposto è un numero primo diviso per 6 non può dare nè 0, nè 2, nè 3 nè 4 per resto. Poichè nel 1° caso sarebbe divisibile per 6, nel 2° e nel 4° per 2, nel 3° per 3, e quindi non potrebbe esser numero primo; restano adunque soltanto possibili i resti 1 e 5; il che equivale a dire che, affinchè un numero **N** sia primo è **necessario** che sia o della forma $N = 6n + 5$ o della forma $N = 6n + 5$, le quali due forme possono evidentemente raccogliersi in una formola unica $N = 6n \pm 1$. Del resto è facile accorgersi, esser ben vero che tale condizione è **necessaria** affinchè N sia primo; ma che **non è** punto **sufficiente** in generale; poichè assumendo nella forma $N = 6n + 5$; p. es. $(n = 5m)$ si ha $N = 5(6m + 1)$ dunque **N** multiplo di 5.

Nella I. tavola dei numeri primi scritti in base sei tale condizione **necessaria** la si vede illustrata, trovandovi esclusivamente dei numeri terminanti in **1** o in **5**.

Nulla impedirebbe naturalmente di stabilire un'altra formola generale pei numeri primi ricorrendo ad altro divisore fisso che non sia il 6 come nella formola precedente; poichè con ragionamenti analoghi si verrebbero ad escludere tutti quei resti che appalesano essere il numero **N** evidentemente divisibile in generale per un certo divisore e non ne rimarrebbero in tal modo che quelli, i quali possono appartenere a numeri primi; solo che adoperando altri divisori fissi la formola generale risultante pei numeri primi non riescirebbe semplicemente biforme come quella più sopra trovata; ma sarebbe in quella vece in generale multiforme.

Ragionando a cagione d'esempio col divisore fisso dodici si potrebbe dire: Affinchè un numero **N** proposto sia primo è **necessario** (ma **non sufficiente** come sopra) che diviso per dodici dia per resto, o **1** o **5** o **7** o **b**; poichè se in quella vece desse per resto uno dei numeri **0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, a** il numero **N** non sarebbe primo, ma sarebbe rispettivamente divisibile per dodici, per 2, 3, 4, 6, 4, 3, 2.

Nella II. tavola dei numeri primi scritti in base dodici, tale condizione **necessaria** la si vede illustrata, trovandovi esclusivamente dei numeri terminanti in **1, 5, 7** o **b**.

XIII. Decomposizione d'un numero nei suoi fattori primi.

Anche questa come tutte le successive ricerche si fanno tutte secondo lo stesso metodo usato nell'aritmetica comune, non solo, ma anche conservando persino la medesima disposizione grafica dei calcoli corrispondenti. Scegliamo p. e. il sistema a base dodici.

$32b60 = 2^3.3^2.5.b.15$;

Infatti:

32b60	2
17590	2
98a6	2
4a53	3
1759	3
65b	5
137	b
15	$(15)_{12} = (17)_{10} =$
1	$=$ num. primo

$39a00 = 2^5.3^2.5^2.b$;

Infatti:

39a00	2
1ab00	2
b560	2
5890	2
2a46	2
1523	3
589	3
1ab	5
47	5
b	b
1	

$b830 = 2^2.3^3.b.15$

Infatti:

b830	2
5a16	2
2b09	3
b83	3
3a9	3
137	b
15	$(15)_{12} = (17)_{10} =$
1	$=$ num. primo

$bb1a = 2.b.661$

Infatti:

bb1a	2
5b6b	b
661	$(661)_{12} = (937)_{10} =$
1	$=$ num. primo

XIV. Ricerca di tutti i divisori d'un numero. Numero dei divisori.

$32b60 = 2^3.3^2.5.b.15$

1, 2, 2^2, 2^3
1, 3, 3^2
1, 5
1, b
1, 15

Il numero di tutti i divisori di $32b60 = 2^3.3^2.5.b.15$ si forma col prodotto $(3+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 4.3.2.2.2 = (80)_{12} = (96)_{10}$.

Quadro di tutti gli $(80)_{12} = (96)_{10}$ divisori di 32b60

1, 2, 2^2, 2^3	b, b.2, b.2^2, b.2^3
3, 3.2, 3.2^2, 3.2^3	b.3, b.3.2, b.3.2^2, b.3.2^3
3^2, 3^2.2, 3^2.2^2, 3^2.2^3	b.3^2, b.3^2.2, b.3^2.2^2, b.3^2.2^3
5, 5.2, 5.2^2, 5.2^3	b.5, b.5.2, b.5.2^2, b.5.2^3
5.3, 5.3.2, 5.3.2^2, 5.3.2^3	b.5.3, b.5.3.2, b.5.3.2^2, b.5.3.2^3
5.3^2, 5.3^2.2, 5.3^2.2^2, 5.3^2.2^3	b.5.3^2, b.5.3^2.2, b.5.3^2.2^2, b.5.3^2.2^3

15, 15.2, 15.2^2, 15.2^3, 15.3, 15.3.2, 15.3.2^2, 15.3.2^3, 15.3^2, 15.3^2.2

15.b.5.3.2^2, 15.b.5.3.2^3, 15.b.5.3^2, 15.b.5.3^2.2, 15.b.5.3^2.2^2, 15.b.5.3^2.2^3

Del resto a tale ricerca si può dare anche un'altra disposizione grafica, forse più opportuna nei calcoli p. es. si tratti del numero b830 scritto in base dodici

	1
b830	2
5a16	2, 2^2
2b09	3, 3.2, 3.2^2
b83	3, 3^2, $3^2.2$, $3^2.2^2$
3a9	3, 3^3, $3^3.2$, $3^3.2^2$
137	b, b.2, $b.2^2$, b.3, b.3.2, $b.3.2^2$, $b.3^2$, $b.3^2.2$, $b.3^2.2^2$, $b.3^3$, $b.3^3.2$, $b.3^3.2^2$
15	15, 15.2, 15.2^2, 15.3, 15.3.2, $15.3.2^2$, 15.3^2, $15.3^2.2$, $15.3^2.2^2$, 15.3^3, $15.3^3.2$, $15.3^3.2^2$, 15.b, 15.b.2, $15.b.2^2$, 15.b.3, 15.b.3.2, $15.b.3.2^2$, $15.b.3^2$, $15.b.3^2.2$, $15.b.3^2.2^2$, $15.b.3^3$, $15.b.3^3.2$, $15.b.3^3.2^2$

Anche con questo procedimento prendendo i fattori primi ciascuno una volta sola e scrivendovi anche il fattore primo 1 si ottengono tutti i divisori del numero proposto. Infatti troviamo anche quì che il numero di tutti i divisori di $b830 = 2^2.3^3.b.15$ è uguale al prodotto $(2+1)(3+1)(1+1)(1+1) = 3.4.2.2 = (40)_{12} = (48)_{10}$.

A completare queste ultime ricerche s'aggiunge quì una *tavola dei numeri non primi* estesa agli stessi limiti come le precedenti tavole sui numeri primi, cioè da **1 a 500**. Questa tavola dà immediatamente i numeri decomposti nei loro fattori primi, e per ciascun numero si trova pure indicato in apposita colonna il numero dei suoi divisori. — Per semplicità i numeri vi sono scritti tutti in base dieci. — Quando nella colonna suddetta troviamo un carattere **distinto**, ciò significa che il numero **n** cui si riferisce, è il minor numero che abbia quel certo numero di divisori. Così p. e. 120 è il minor numero che abbia 16 divisori. — Questa tavola può servire da introduzione al capitolo seguente, che s'occupa precisamente di simile ricerca; d'altronde la tavola considerata in se stessa non manca forse di qualche pratica utilità.

Tavola dei numeri non primi da 1 a 500

loro fattori primi, e numero dei loro divisori.

n	Num. dei divisori	n	Num. dei divisori	n	Num. dei divisori	n	Num. dei divisori
$4=2^2$	**3**	$49=7^2$	3	$90=2.3^2.5$	12	$129=3.43$	4
$6=2.3$	**4**	$50=2.5^2$	6	$91=7.13$	4	$130=2.5.13$	8
$8=2^3$	4	$51=3.17$	4	$92=2^2.23$	6	$132=2^2.3.11$	12
$9=3^2$	3	$52=2^2.13$	6	$93=3.31$	4	$133=7.19$	4
$10=2.5$	4	$54=2.3^3$	8	$94=2.47$	4	$134=2.67$	4
$12=2^2.3$	**6**	$55=5.11$	4	$95=5.19$	4	$135=3^3.5$	8
$14=2.7$	4	$56=2^3.7$	8	$96=2^5.3$	12	$136=2^3.17$	8
$15=3.5$	4	$57=3.19$	4	$98=2.7^2$	6	$138=2.3.23$	8
$16=2^4$	5	$58=2.29$	4	$99=3^2.11$	6	$140=2^2.5.7$	12
$18=2.3^2$	6	$60=2^2.3.5$	**12**	$100=2^2.5^2$	9	$141=3.47$	4
$20=2^2.5$	6	$62=2.31$	4	$102=2.3.17$	8	$142=2.71$	4
$21=3.7$	4	$63=3^2.7$	6	$104=2^3.13$	8	$143=11.13$	4
$22=2.11$	4	$64=2^6$	7	$105=3.5.7$	8	$144=2^4.3^2$	15
$24=2^3.3$	**8**	$65=5.13$	4	$106=2.53$	4	$145=5.29$	4
$25=5^2$	3	$66=2.3.11$	8	$108=2^2.3^3$	12	$146=2.73$	4
$26=2.13$	4	$68=2^2.17$	6	$110=2.5.11$	8	$147=3.7^2$	6
$27=3^3$	4	$69=3.23$	4	$111=3.37$	4	$148=2^2.37$	6
$28=2^2.7$	6	$70=2.5.7$	8	$112=2^4.7$	10	$150=2.3.5^2$	12
$30=2.3.5$	8	$72=2^3.3^2$	12	$114=2.3.19$	8	$152=2^3.19$	8
$32=2^5$	6	$74=2.37$	4	$115=5.23$	4	$153=3^2.17$	6
$33=3.11$	4	$75=3.5^2$	6	$116=2^2.29$	6	$154=2.7.11$	8
$34=2.17$	4	$76=2^2.19$	6	$117=3^2.13$	6	$155=5.31$	4
$35=5.7$	4	$77=7.11$	4	$118=2.59$	4	$156=2^2.3.13$	12
$36=2^2.3^2$	**9**	$78=2.3.13$	8	$119=7.17$	4	$158=2.79$	4
$38=2.19$	4	$80=2^4.5$	10	$120=2^3.3.5$	**16**	$159=3.53$	4
$39=3.13$	4	$81=3^4$	5	$121=11^2$	3	$160=2^5.5$	12
$40=2^3.5$	8	$82=2.41$	4	$122=2.61$	4	$161=7.23$	4
$42=2.3.7$	8	$84=2^2.3.7$	12	$123=3.41$	4	$162=2.3^4$	10
$44=2^2.11$	6	$85=5.17$	4	$124=2^2.31$	6	$164=2^2.41$	6
$45=3^2.5$	6	$86=2.43$	4	$125=5^3$	4	$165=3.5.11$	8
$46=2.23$	4	$87=3.29$	4	$126=2.3^2.7$	12	$166=2.83$	4
$48=2^4.3$	**10**	$88=2^3.11$	8	$128=2^7$	8	$168=2^3.3.7$	16

n	Num. dei divisori	n	Num. dei divisori	n	Num. dei divisori	n	Num. dei divisori
$169 = 13^2$	3	$210 = 2.3.5.7$	16	$252 = 2^2.3^2.7$	18	$296 = 2^3.37$	8
$170 = 2.5.17$	8	$212 = 2^2.53$	6	$253 = 11.23$	4	$297 = 3^3.11$	8
$171 = 3^2.19$	6	$213 = 3.71$	4	$254 = 2.127$	4	$298 = 2.149$	4
$172 = 2^2.43$	6	$214 = 2.107$	4	$255 = 3.5.17$	8	$299 = 13.23$	4
$174 = 2.3.29$	8	$215 = 5.43$	4	$256 = 2^8$	9	$300 = 2^2.3.5^2$	18
$175 = 5^2.7$	6	$216 = 2^3.3^3$	16	$258 = 2.3.43$	8	$301 = 7.47$	4
$176 = 2^4.11$	10	$217 = 7.31$	4	$259 = 7.37$	4	$302 = 2.151$	4
$177 = 3.59$	4	$218 = 2.109$	4	$260 = 2^2.5.13$	12	$303 = 3.101$	4
$178 = 2.89$	4	$219 = 3.73$	4	$261 = 3^2.29$	6	$304 = 2^4.19$	10
$180 = 2^2.3^2.5$	18	$220 = 2^2.5.11$	12	$262 = 2.131$	4	$305 = 5.61$	4
$182 = 2.7.13$	8	$221 = 13.17$	4	$264 = 2^3.3.11$	16	$306 = 2.3^2.17$	12
$183 = 3.61$	4	$222 = 2.3.37$	8	$265 = 5.53$	4	$308 = 2^2.7.11$	12
$184 = 2^3.23$	8	$224 = 2^5.7$	12	$268 = 2^2.67$	6	$309 = 3.113$	4
$185 = 5.37$	4	$225 = 3^2.5^2$	9	$270 = 2.3^3.5$	16	$310 = 2.5.31$	8
$186 = 2.3.31$	8	$226 = 2.113$	4	$272 = 2^4.17$	10	$312 = 2^3.3.13$	16
$187 = 11.17$	4	$228 = 2^2.3.17$	12	$273 = 3.7.13$	8	$314 = 2.157$	4
$188 = 2^2.47$	6	$230 = 2.5.23$	8	$274 = 2.137$	4	$315 = 3^2.5.7$	12
$189 = 3^3.7$	8	$231 = 3.7.11$	8	$275 = 5^2.11$	6	$316 = 2^2.79$	6
$190 = 2.5.19$	8	$232 = 2^3.29$	8	$276 = 2^2.3.23$	12	$318 = 2.3.53$	8
$192 = 2^6.3$	14	$234 = 2.3^2.13$	12	$278 = 2.139$	4	$319 = 11.29$	4
$194 = 2.97$	4	$235 = 5.47$	4	$279 = 3^2.31$	6	$320 = 2^6.5$	14
$195 = 3.5.13$	8	$236 = 2^2.59$	6	$280 = 2^3.5.7$	16	$321 = 3.107$	4
$196 = 2^2.7^2$	9	$237 = 3.79$	4	$282 = 2.3.47$	8	$322 = 2.7.23$	8
$198 = 2.3^2.11$	12	$238 = 2.7.17$	8	$284 = 2^2.71$	6	$323 = 17.19$	4
$200 = 2^3.5^2$	12	$240 = 2^4.3.5$	20	$285 = 3.5.19$	8	$324 = 2^2.3^4$	15
$201 = 3.67$	4	$242 = 2.11^2$	6	$286 = 2.11.13$	8	$325 = 5^2.13$	6
$202 = 2.101$	4	$243 = 3^5$	6	$287 = 7.41$	4	$326 = 2.163$	4
$203 = 7.29$	4	$244 = 2^2.61$	6	$288 = 2^5.3^2$	18	$327 = 3.109$	4
$204 = 2^2.3.17$	12	$245 = 5.7^2$	6	$289 = 17^2$	3	$328 = 2^3.41$	8
$205 = 5.41$	4	$246 = 2.3.41$	8	$290 = 2.5.29$	8	$329 = 7.47$	4
$206 = 2.53$	4	$247 = 13.19$	4	$291 = 3.97$	4	$330 = 2.3.5.11$	16
$207 = 3^2.23$	6	$248 = 2^3.31$	8	$292 = 2^2.73$	6	$332 = 2^2.83$	6
$208 = 2^4.13$	10	$249 = 3.83$	4	$294 = 2.3.7^2$	12	$333 = 3^2.37$	6
$209 = 11.19$	4	$250 = 2.5^3$	8	$295 = 5.59$	4	$334 = 2.167$	4

n	Num. dei divisori	n	Num. dei divisori	n	Num. dei divisori	n	Num. dei divisori
$335 = 5.67$	4	$377 = 13.29$	4	$417 = 3.139$	4	$459 = 3^3.17$	8
$336 = 2^4.3.7$	20	$378 = 2.3^3.7$	16	$418 = 2.11.19$	8	$460 = 2^2.5.23$	12
$339 = 3.113$	4	$380 = 2^2.5.19$	16	$420 = 2^2.3.5.7$	24	$462 = 2.3.7.11$	16
$340 = 2^2.5.17$	12	$381 = 3.127$	4	$422 = 2.211$	4	$464 = 2^4.29$	10
$341 = 11.31$	4	$382 = 2.191$	4	$423 = 3^2.47$	6	$465 = 3.5.31$	8
$342 = 2.3^2.19$	12	$384 = 2^7.3$	16	$424 = 2^3.53$	8	$466 = 2.233$	4
$343 = 7^3$	4	$385 = 5.7.11$	8	$425 = 5^2.17$	6	$468 = 2^2.3^2.13$	18
$344 = 2^3.43$	8	$386 = 2.193$	4	$426 = 2.3.71$	8	$469 = 7.67$	4
$345 = 3.5.23$	8	$387 = 3^2.43$	6	$427 = 7.61$	4	$470 = 2.5.47$	8
$346 = 2.173$	4	$388 = 2^2.97$	6	$428 = 2^2.107$	6	$471 = 3.157$	4
$348 = 2^2.3.29$	12	$390 = 2.3.5.13$	16	$429 = 3.11.13$	8	$472 = 2^3.59$	8
$350 = 2.5^2.7$	12	$391 = 17.23$	4	$430 = 2.5.43$	8	$473 = 11.43$	4
$351 = 3^3.13$	8	$392 = 2^3.7^2$	12	$432 = 2^4.3^3$	20	$474 = 2.3.79$	8
$352 = 2^5.11$	12	$393 = 3.131$	4	$434 = 2.7.31$	8	$475 = 5^2.19$	6
$354 = 2.3.59$	8	$394 = 2.197$	4	$435 = 3.5.29$	8	$476 = 2^2.7.17$	12
$355 = 5.71$	4	$395 = 5.79$	4	$436 = 2^2.109$	6	$478 = 2.239$	4
$356 = 2^2.89$	6	$396 = 2^2.3^2.11$	18	$437 = 19.23$	4	$480 = 2^5.3.5$	24
$357 = 3.7.17$	8	$398 = 2.199$	4	$438 = 2.3.73$	8	$481 = 13.37$	4
$358 = 2.179$	4	$399 = 3.7.19$	8	$440 = 2^3.5.11$	16	$482 = 2.241$	4
$360 = 2^3.3^2.5$	**24**	$400 = 2^4.5^2$	15	$441 = 3^2.7^2$	9	$483 = 3.7.23$	8
$361 = 19^2$	3	$402 = 2.3.67$	8	$442 = 2.13.17$	8	$484 = 2^2.11^2$	9
$362 = 2.181$	4	$403 = 13.31$	4	$444 = 2^2.3.37$	12	$485 = 5.97$	4
$363 = 3.11^2$	6	$404 = 2^2.101$	6	$445 = 5.89$	4	$486 = 2.3^5$	12
$364 = 2^2.7.13$	12	$405 = 3^4.5$	10	$446 = 2.223$	4	$488 = 2^3.61$	8
$365 = 5.73$	4	$406 = 2.7.29$	8	$447 = 3.149$	4	$489 = 3.163$	4
$366 = 2.3.61$	8	$407 = 11.37$	4	$448 = 2^6.7$	14	$490 = 2.5.7^2$	12
$368 = 2^4.23$	10	$408 = 2^3.3.17$	16	$450 = 2.3^2.5^2$	18	$492 = 2^2.3.41$	12
$369 = 3^2.41$	6	$410 = 2.5.41$	8	$451 = 11.41$	4	$493 = 17.29$	4
$370 = 2.5.37$	8	$411 = 3.137$	4	$452 = 2^2.113$	6	$494 = 2.13.19$	8
$371 = 7.53$	4	$412 = 2^2.103$	6	$453 = 3.151$	4	$495 = 3^2.5.11$	12
$372 = 2^2.3.31$	12	$413 = 7.59$	4	$454 = 2.227$	4	$496 = 2^4.31$	10
$374 = 2.11.17$	8	$414 = 2.3^2.23$	12	$455 = 5.7.13$	8	$497 = 7.71$	4
$375 = 3.5^3$	8	$415 = 5.83$	4	$456 = 2^3.3.19$	16	$498 = 2.3.83$	8
$376 = 2^3.47$	8	$416 = 2^5.13$	12	$458 = 2.229$	4	$500 = 2^2.5^3$	12

XV. Ricerca del minor numero, che abbia un numero dato di divisori.

Il minor numero che abbia **2** divisori è: 2, in cui i divisori sono 1 e 2;
infatti 1 non ha che 1 divisore

id. id. **3** id. 2^2, in cui i divisori sono 1, 2 e 2^2;
infatti 2 e 3 non hanno che 2 divisori

id. id. **4** id. 2.3, in cui i divisori sono 1, 2, 3, 2.3;
infatti 5 non ha che 2 divisori

Il minor numero avente più di 4 (e precisamente 6) divisori è: $2^2.3$, in cui i divisori sono 1, 2, 2^2, 3, 2.3, $2^2.3$; per $n < 2^2.3$ vi sono al più 4 divisori.

Consultando poi i successivi termini della serie naturali dei numeri si riscontrano poi fino al termine $2^3.3$ (escluso) sempre di quelli che hanno tutt'al più **6** divisori e quindi:

Il minor numero che abbia più di 6 (e precisamente 8) divisori è: il doppio di dodici cioè $2^3.3$ i cui divisori sono: 1, 2, 3, 2^2, 2.3, 2^3, $2^2.3$, $2^3.3$

così si troverebbe il minor numero che abbia **9** divisori è il triplo di dodici cioè $2^2.3^2$ i cui divisori sono: 1, 2, 3, 2^2, 2.3, 3^2, $2^2.3$, 2.3^2, $2^2.3^2$

così si troverebbe il minor numero che abbia **dieci** divisori è il quadruplo di dodici cioè: $2^4.3$ i cui divisori sono 1, 2, 3, 2^2, 2.3, 2^3, $2^2.3$, 2^4, $2^3.3$, $2^4.3$

così si troverebbe il minor numero che abbia più di 10 (e precisamente 12) divisori è il quintuplo di dodici cioè: $2^2.3.5$ i cui divisori sono: 1, 2, 3, 2^2, 5, 2.3, 2.5, $2^2.3$, 3.5, $2^2.5$, 2.3.5, $2^2.3.5$ ecc.

Vediamo adunque che formandosi una tavola come quella esposta più sopra, nella quale si leggessero i successivi termini della serie naturale dei numeri e ciascuno dei medesimi vi si trovasse decomposto nei suoi fattori primi, la risoluzione del presente problema non richiederebbe che una semplice ispezione di detta tavola.

Del resto vediamo già che per la risoluzione di tale problema si tratta di combinare assieme in un prodotto i più piccoli fattori possibili; applicando al maggior d'essi il minimo esponente possibile ed al minor fattore il massimo esponente possibile, per modo che il prodotto risultante sia il minor numero che abbia il richiesto numero di divisori. Diamo quì alcuni esempi particolari, che mostreranno, come in pratica si possa risolvere questo problema non potendosi servire della tavola suaccennata, mentre in generale non ammette soluzione metodica.

I. Si voglia trovare il minor numero avente sedici divisori.

Formiamone intanto uno a caso p. es.: $2^3.5^3$; è chiaro, che il prodotto di 2 cubi diversi qualunque avrà pure come quello prescielto sedici divisori; quindi lo si rende tosto minore, sostituendovi invece $2^3.3^3 = 2.3.2^2.3^2$. È però ancora evidente, che se a questo numero sostituissi un altro qualunque, purchè formato dal prodotto di quattro fattori differenti, il numero così ottenuto avrebbe ancora per lo meno sedici divisori e scegliendo a tale uopo i quattro più piccoli numeri successivi 2, 3, 4, 5 s'avrà il numero $2.3.4.5 < 2^3.3^3$ perchè $5 < 3^2$; onde $2.3.4.5 = 2^3.3.5 =$ dieci volte dodici è il minor numero che abbia più di 12 (e precisamente 16) divisori.

II. Analogamente si troverebbe che il minor numero che abbia più di 16 (e precisamente 18) divisori è $2^2.3^2.5 =$ quindici volte dodici

III. Analogamente si troverebbe che il minor numero che abbia piu di 18 (e precisamente 20) divisori è $2^4.3.5$ = venti volte dodici

IV. Analogamente si troverebbe che il minor numero che abbia più di 20 (e precisamente 24) divisori è $2^3.3^2.5$ = trenta volte dodici

V. Analogamente si troverebbe che il minor numero che abbia più di 36 (e precisamente 40) divisori è $2^4.5.7$ = centoquaranta volte dodici.

Da questi pochi esempi risulta già che se il numero richiesto di divisori non è primo, giova decomporlo nel maggior numero di fattori (e quindi possibilmente piccoli) ed applicare ciascuno d'essi diminuito di 1 quale esponente ad una base possibilmente piccola e coll'ulteriore avvertenza di applicare gli esponenti maggiori alle basi minori e discendere così gradatamente per arrivare possibilmente cogli esponenti minori alle basi maggiori. Chè se invece il numero richiesto di divisori fosse primo, lo si aumenti di 1 unità e si operi come nel caso precedente; così p. es. volendo trovare il minor numero avente 17 divisori si cerchi il minor numero che ne ha 18; quello stesso numero risolve anche il problema. Ed in generale ove il numero di divisori richiesto sia piuttosto forte e non si possa decomporre in fattori convenientemente piccoli, giova aumentare quel numero di alcune poche unità, di tante cioè, quante bastano, per ottenere un numero decomponibile in più fattori abbastanza piccoli che sieno possibilmente 2, 3, 5 ecc.; così invece di cercare il minor numero che ha 21 divisori essendo $21 = 3.7$, si cerca invece il minor numero che abbia $(21 + 3 = 24)$ divisori, essendo $24 = 2^3.3$; quest'ultimo numero risolve evidentemente il problema, poichè occupandoci esclusivamente della ricerca del numero avente $21 = 3.7$ divisori, si riterrebbe essere $2^6.3^2$ il minore fra tutti, perchè formato colle basi minime 2 e 3; così pel numero di 22 divisori si crederebbe dover essere $2^{10}.3$ il minor numero possibile, mentre $2^3.3^2.5$ ha 24 divisori ed è minore di ambedue.

Incidentalmente ricaviamo ancora da questa ricerca che essendo il numero dodici il minor numero che ammetta sei divisori, questo ulteriore suo pregio lo rende maggiormente atto a servire quale base d'un sistema di numerazione; abbiamo veduto altresì che i multipli del dodici sono contraddistinti dalla proprietà di essere in generale i minori che abbiano un dato numero di divisori.

XVI. Ricerca del massimo comun divisore a due o più numeri dati.

I. Metodo della decomposizione in fattori primi.

Esempî scritti in base dodici:

1) Trovare il massimo comun divisore dei numeri 32b60 e 39a00

$$\left.\begin{array}{l} 32b60 = 2^3.3^2.5.b.15 \\ 39a00 = 2^5.3^2.5^2.b \end{array}\right\} \mathbf{MCD} = 2^3.3^2.5.b = \mathbf{2360}$$

2) Trovare il massimo comun divisore dei numeri b830 e bb1a

$$\left.\begin{array}{l} b830 = 2^2.3^3.b.15 \\ bb1a = 2.b.661 \end{array}\right\} \mathbf{MCD} = 2.b = \mathbf{1a}$$

3) Trovare il massimo comun divisore dei quattro numeri 32b60, 39a00, b830, bb1a. Essendosi scelto quattro numeri, la cui decomposizione in fattori è già effettuata più sopra si trova **MCD = 2 . b = 1a.**

II. Metodo delle successive divisioni.

Adottiamo, per controllo dei risultati, gli stessi esempî di prima.

Esempi scritti in base dodici:

		1	5	1	2
1)	39a00	32b60	6a60	4700	2360
	32b60	2a460	4700	4700	
	6a60	4700	2360	0	

MCD = 2360 come sopra

		1	40	3	6
2)	bb1a	b830	2aa	b0	1a
	b830	b74	290	b0	
	2aa	b0	1a	0	

MCD = 1a come sopra

3) Si può trovarlo in due modi:

a) Accoppiando i numeri dati a 2 a 2, si cerchi separatamente il MCD di ciascuna coppia ed il MCD dei 2 massimi comuni divisori delle coppie sarà quello domandato; abbiamo quindi infatti:

2360 : 1a = 130 onde è **MCD = 1a come sopra.**

b) E servendosi dello schema consueto abbiamo pure

	5	a		44	1b	
b830	2360	290	bb1a	290	1a	
b560	2360		b00	1a		
290	0		b1a	b0		
			b00	b0		
			1a	0		

32b60, 39a00, b830, bb1a

$M_1\ C_1\ D_1 = 2360$

$M_2\ C_2\ D_2 = 290$

$MCD = 1a$

MCD = 1a come sopra.

XVII. Ricerca del minimo comune multiplo di due o più numeri dati.

I. Metodo della decomposizione in fattori primi.

Esempî scritti in base dodici:

1) Trovare il minimo comune multiplo dei numeri 32b60 e 39a00

$32b60 = 2^3.3^2.5.b.15$
$39a00 = 2^5.3^2.5^2.b$ } **Min. com. mult. $= 2^5 3^2.5^2 b.15 = 54b200$**

2) Trovare il minimo comune multiplo dei numeri b830 e bb1a

$b830 = 2^2.3^3.b.15$
$bb1a = 2.b.611$ } **Min. com. mult. $= 2^2.3^3.b.15.661 = 6407230$**

3) Trovare il minimo comune multiplo dei numeri 4, a, 20 e 21

$4 = 2^2;\ a = 2.5;\ 20 = 2^3.3;\ 21 = 5^2.$

Min. com. mult. $= 2^3.3.5^2 = 420$

II. Metodo, servendosi del MCD già preventivamente trovato.

Esempî scritti in base dodici:

Adottiamo per controllo dei risultati precedenti gli stessi esempî di prima.

1) Min. com. mult. $= \frac{32b60}{MCD} \times 39a00 = \frac{32b60}{2360} \times 39a00 = 15 \times 39a00 = 54b200$

```
32b60 : 2360 = 15      39a00
2360                     15
 b560                  1712      Min. com. mult. = 54b200 come sopra
 b560                  39a
    0                 54b200
```

2) Min. com. mult. $= \frac{bb1a}{MCD} \times b830 = \frac{bb1a}{1a} b830 = 661 \times b830 = 6407230$

```
bb1a : 1a = 661      b830
b0                    661
 b1                   b83
 b0                 5a16      Min. com. mult. = 6407230 come sopra
  1a                5a16
  1a              6407230
   0
```

3) Anche quì si possono usare 2 modi corrispondenti a quanto si è fatto pel MCD

a) $\underbrace{4, \qquad 20}_{M_1\ C_1\ D_1 = 2^2}$ $\qquad$ $\underbrace{a, \qquad 21}_{M_2\ C_2\ D_2 = 5}$

$\underbrace{\text{Min. com. mult.}_1 = 20}$ $\qquad$ $\underbrace{\text{Min. com. mult.}_2 = 42}$

```
42 | 2 | 10
40 | 20 | 2
 2 |  0 |
```

Min. com. mult. $\frac{20}{MCD} \times 42 = \frac{20}{2} \times 42 = 10 \times 42 = 420$

Min. com. mult. = 420 come sopra

b) 4, 20, a, 21

$M_1\ C_1\ M_1 = 20$

$M_2\ C_2\ M_2 = a0$

MCM = 420

MCM = 420 come sopra.

III. Metodo intuitivo, quando si tratti di più di 2 numeri.

Si eliminano quegli tra i numeri proposti che sono contenuti per lo meno in uno degli altri; si separano successivamente i fattori comuni a due o più dei numeri rimasti, che si dividono per quei fattori comuni, si scrivono i quozienti, si eliminano i dividendi e si ripetono queste operazioni sui numeri non cancellati nè separati, fino a che non vi sieno più numeri perfettamente contenuti da eliminare, nè fattori comuni da separare. Il prodotto dei num. rimasti e sep. dà il M. C. M. richiesto.

Esempio scritto in base dodici:

```
4      20      a      21
       10      5      | 2
```

Min. com. mult. = 2 × 10 × 21 = 420 come sopra

Ragionamento: Cancello il 4 perchè contenuto in 20; separo il 2 che è contenuto in 20 ed in a, divido questi due numeri per il 2 separato, scrivo i quozienti e

cancellò i dividendi; cancello poi ancora il quoziente 5, perchè contenuto in 21 e mi restano i numeri non cancellati 10, 21 e 2 il cui prodotto $10 \times 21 \times 2 = 420$ è il min. com. mult. domandato. Si ommette la dimostrazione per brevità e perchè facilissima.

XVIII. Calcolo delle frazioni ordinarie.

In quanto al calcolo delle frazioni ordinarie, dei numeri frazionarî e dei numeri misti, non vi è nulla da aggiungere pel caso che si scrivano in un sistema non decimale, in quanto che questo calcolo si effettua precisamente come quando i numeri stessi si scrivessero nel sistema decimale.

Esempî scritti in base dodici:

1) *Semplificazione delle frazioni e loro riduzione ai minimi termini; estrazione degli interi da un numero frazionario ed incorporazione degli interi d'un numero misto.*

$$\frac{b830}{bb1a} \overset{(2)}{=} \frac{5a16}{5b6b} \overset{(b)}{=} \frac{646}{661}$$

$$\frac{32b60}{39a00} \overset{(10)}{=} \frac{32b6}{39a0} \overset{(6)}{=} \frac{65b}{778} \overset{(b)}{=} \frac{71}{84} \overset{(5)}{=} \frac{15}{18}$$

$$\frac{b830}{bb1a} \overset{(1a)}{=} \frac{646}{661}; \quad 1a = \text{MCD dei 2 termini}$$

$$\frac{32b60}{39a00} \overset{(2360)}{=} \frac{15}{18}; \quad 2360 = \text{MCD dei 2 termini}$$

$$\frac{661}{646} = 661 : 646 = 1\frac{17}{646}$$

$$1\frac{3}{15} = \frac{1 \times 15 + 3}{15} = \frac{18}{15}$$

2) *Riduzione di più frazioni allo stesso denominatore ed al minimo denominator comune.*

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times a \times 20 \times 21}{4 \times a \times 20 \times 21} = \frac{a500}{11a80}$$

$$\frac{7}{a} = \frac{7 \times 4 \times 20 \times 21}{a \times 4 \times 20 \times 21} = \frac{9880}{11a80}$$

$$\frac{5}{20} = \frac{5 \times 4 \times a \times 21}{20 \times 4 \times a \times 21} = \frac{2a88}{11a80}$$

$$\frac{3}{21} = \frac{3 \times 4 \times a \times 20}{21 \times 4 \times a \times 20} = \frac{1800}{11a80}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 4, & a, & 20, & 21, & 5 \\ & 2 & & 5 & \end{array}$$

Il min. com. mult. dei denominatori e quindi il minimo comune denominatore =

$$= 20 \times 5 \times 5 = 420$$

Quindi si ha pure

$$\frac{3}{4} = \frac{316}{420} \qquad \frac{7}{a} = \frac{2b0}{420} \qquad \frac{5}{20} = \frac{a5}{420} \qquad \frac{3}{21} = \frac{60}{420}$$

3) *Addizione e sottrazione delle frazioni, dei numeri frazionarî e dei numeri misti.*

$$\frac{8}{20} + \frac{5}{20} + \frac{a}{20} + \frac{7}{20} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$$

$$1\frac{15}{36} + \frac{41}{36} - 1\frac{18}{36} + \frac{7}{36} =$$

$$= 2\frac{27}{36} - 1\frac{18}{36} = 1\frac{14}{36}$$

$$1\frac{3}{4} + \frac{7}{a} + 2\frac{5}{20} + 3\frac{8}{21} =$$

$$= 1\frac{316}{420} + \frac{2b0}{420} + 2\frac{a5}{420} + 3\frac{60}{420} = 6\frac{74b}{420} = 7\frac{32b}{420}$$

$$8\frac{3}{21} - 1\frac{3}{4} - \frac{7}{a} = 8\frac{60}{420} - 1\frac{316}{420} - \frac{2b0}{420} =$$

$$= 8\frac{60}{420} - 1\frac{606}{420} = \frac{29a0}{420} - \frac{a26}{420} = \frac{1b76}{420} =$$

$$= 5\frac{296}{420} = 5\frac{57}{84}$$

4) *Moltiplicazione e divisione delle frazioni, dei numeri frazionarî e dei numeri misti.*

$$\frac{7}{a}\times a=7;\ \frac{7}{a}\times b=\frac{65}{a}=7\frac{7}{a};\ \frac{7}{a}\times 5=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$$

$$8\times 2\frac{5}{20}=8\times\frac{45}{20}=\frac{45}{3}=15\frac{2}{3};\ 1\frac{a}{b}\times 2\frac{9}{a}=\frac{19}{b}\times\frac{25}{a}=\frac{19\times 25}{a\times b}=\frac{429}{92}=5\frac{4b}{92}$$

$$\frac{a}{1a}:5=\frac{a}{92};\ \frac{a}{1a}:5=\frac{2}{1a};\ 3\frac{1}{2}:5=\frac{7}{2}:5=\frac{7}{a};\ \frac{3}{21}:\frac{5}{20}=\frac{3}{21}\times\frac{20}{5}=\frac{60}{a5}$$

$$15\frac{2}{3}:2\frac{5}{20}=\frac{45}{3}:\frac{45}{20}=\frac{20}{3}=8;\ 8:2\frac{5}{20}=8:\frac{45}{20}=8\times\frac{20}{45}=\frac{140}{45}=3\frac{29}{45}$$

5) *Innalzamento a potenza (p. es. a 2a. ed a 3a. potenza) delle frazioni, dei numeri frazionarî e dei numeri misti.*

$$\left(\frac{78}{20}\right)^2=\frac{78^2}{20^2}=\frac{4a94}{400}$$

essendo $78^2=\left\{\begin{array}{r}41\\94\\54\\\hline 4a94\end{array}\right\}=4a94$

e $20^2=400$

$$\left(\frac{20}{78}\right)^3=\frac{20^3}{78^3}=\frac{8000}{316768}$$

essendo $20^3=8000$

e $78^3=\left\{\begin{array}{r}247\\820\\940\\368\\\hline 316768\end{array}\right\}=316768$

ecc. ecc.

6) *Estrazione di radici quadrate e cubiche esatte delle frazioni, dei numeri frazionarî e dei numeri misti.*

$$\sqrt{\frac{4a94}{400}}=\frac{\sqrt{4a94}}{\sqrt{400}}=\frac{78}{20}$$

essendo $\sqrt{4a94}=78$

e $\sqrt{400}=20$

$$\sqrt[3]{\frac{316768}{8000}}=\frac{\sqrt[3]{316768}}{\sqrt[3]{8000}}=\frac{78}{20}$$

essendo $\sqrt[3]{316768}=78$

e $\sqrt[3]{8000}=20$

7) *Estrazione di radice quando il solo denominatore dà radice esatta.*

$\sqrt{\frac{4aba96}{400}}=\frac{\sqrt{4aba96}}{20}=\frac{782}{20}$ a meno di $\frac{1}{20}$, poichè $\sqrt{4aba96}=782$ a meno di 1 unità

$\sqrt[3]{\frac{3190bb969}{8000}}=\frac{\sqrt[3]{3190bb969}}{20}=\frac{782}{20}$ a meno di $\frac{1}{20}$, poichè $\sqrt[3]{3190bb969}=782$ a meno di 1 unità

8) *Estrazione di radice quando nessuno dei termini dà radice esatta.*

$\sqrt{\frac{5}{20}}=\sqrt{\frac{5\times 20}{20\times 20}}=\frac{\sqrt{a0}}{20}=\frac{a}{20}$ a meno di $\frac{1}{20}$, poichè $\sqrt{a0}=a$ a meno di 1 unità

$\sqrt[3]{\frac{3}{21}}=\sqrt[3]{\frac{3\times 21^2}{21\times 21^2}}\times\frac{\sqrt[3]{1103}}{21}=\frac{10}{21}$ a meno di $\frac{1}{21}$, poichè $\sqrt{1103}=10$ a meno di 1 unità

9) *Estrazione di radice approssimata a meno di $\frac{1}{m}$ da un numero intero.* Sia p. es. m = 84, allora l'estrazione della radice s'intende a meno di $\left(\frac{1}{84}\right)_{12}=\left(\frac{1}{100}\right)_{10}$.

$$\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10 \times 84^2}}{84} = \frac{250}{84} = 250 : 84 = 3\frac{40}{84} \quad \text{a meno di } \frac{1}{84}$$

Infatti:

$84^2 = 5954$; $84^2 \times 10 = 59540$

$\sqrt{59540} = 250$ a meno di 1 unità

$$\sqrt[3]{10} = \frac{\sqrt[3]{10 \times 84^3}}{84} = \frac{165}{84} = 165 : 84 = 2\frac{19}{84} \quad \text{a meno di } \frac{1}{84}$$

Infatti:

$84^3 = 376854$; $84^3 \times 10 = 3768540$

$\sqrt[3]{3768540} = 165$ a meno di 1 unità

10) *Estrazione di radice approssimata a meno di* $\frac{1}{m}$ *da una frazione.* Calcolare p. es. le seguenti radici pel caso che $m = 84$ cioè a meno di $\left(\frac{1}{84}\right)_{12} = \left(\frac{1}{100}\right)_{10}$

$$\sqrt{\frac{5}{20}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{20} \times 84^2}}{84} = \frac{\sqrt{1257}}{84} = \frac{43}{84} \quad \text{a meno di } \frac{1}{84}$$

Infatti: $84^2 \times \frac{5}{20} = \frac{24b28}{20} = 1257\frac{8}{20} = 1257$ a meno di 1 unità

$\sqrt{1257} = 43$ a meno di 1 unità

$$\sqrt[3]{\frac{3}{21}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{21} \times 84^3}}{84} = \frac{3b}{84} \quad \text{a meno di } \frac{1}{84}$$

Infatti: $84^3 \times \frac{3}{21} = \frac{aa8140}{21} = 52883\frac{19}{21} = 52883$ a meno di 1 unità

$aa8140 : 21 = 52883$ $\qquad \sqrt[3]{52883} = 3b$ a meno di 1 unità

XIX. Prove alle operazioni.

In quanto alle prove sulle operazioni in qualunque sistema numerico si facciano i calcoli, vi si trova sempre un equivalente della prova del **9** dell'aritmetica decimale ed è la prova del numero **b—1**, se **b** è la base del sistema, talchè pel sistema duodecimale adotteremo la prova dell'undici, che si farà colla medesima speditezza sui numeri proposti, come quella del **9** nell'aritmetica comune. È inutile aggiungere anche quì, che nulla impedisce di adottare qualunque altra prova (cioè mediante i resti ottenuti con altro divisore fisso), ma niuna riescirà a nostro avviso nello stesso tempo nelle pratiche applicazioni sì spedita e relativamente sì sicura quanto quella col divisore (**b — 1**) e ciò precipuamente per le seguenti ragioni:

1) Riesce più spedita, inquantochè si riduce a determinare la somma delle cifre dei numeri proposti, sulla quale somma non si fa che un'unica divisione per determinarne il resto; mentre adoperando un altro divisore, o bisogna fare parecchie divi-

sioni parziali prima di giungere al residuo definitivo, oppure se quel divisore è tale che per la determinazione del resto definitivo ci bastano alcune cifre soltanto di ciascuno dei numeri dati, allora quella prova non ci dà alcuna garanzia sull'esattezza delle cifre da essa non contemplate; mentre la prova pel divisore (b — 1)

2) Riesce più sicura, inquantochè col suo mezzo dobbiamo necessariamente passare la rassegna a tutte le cifre de' numeri proposti, facendone le somme rispettive.

Esempî della prova dell' undici sulle operazioni fatte nel sistema duodecimale.

Addizione

```
 ab9876 | 7
   7820 | 6
  35400 | 1
  ba987 | 1
 120000 | 3
-------------
1159661 | 7
```

Sottrazione

```
 945,ab75 | 7
  67,89ab | 7
-----------------
 89a,2186 | 0
```

Moltiplicazione

```
  ab,9876 (7)
     0,782 (6)
-------------
  19b7330
 73a5900
64a8046
-------------
70,4458b30 (9)
```

```
6 × 7
-----
9 | 9
```

Divisione

```
(1) 704458b359 | ab9876 (7)
    64a8046    | 7820 (6)
    -------
     7585453
     73a5900
     -------
      19b7535
      19b7530
      -------
           59 (1)
```

```
6 × 7 + 3 | 1
-------------
1         1
```

Innalzamento a quadrato

```
(6) 782² = 41
            94
            54
            2684
        (3) 4aba84
```

```
6 | 6
-----
3 | 3
```

Innalzamento a cubo

```
(6) 0,782³ = 247
             820
             940
              368
             25480
                 7808
        (7) 0,3190bb808
```

```
6 | 3
-----
7 | 7
```

Estrazione di radice quadrata

```
(6) √4aba96 = 782 (6)
    41
    ---
     9ba
     994
     ---
      2696
      2684
      ----
        12 (8)
```

```
6.6 + 3 | 33
-----------
6       | 6
```

Estrazione di radice cubica

```
(4) ∛3190bb969 = 782 (6)
    247
    ---
    920,bb
    820
     940
      368
    -------
    2553969
    25480
       7808
    -------
       161 (8)
```

```
6.3 + 8 | 22
-----------
4       | 4
```

XX. Calcolo dei numeri complessi nel sistema numerico duodecimale. Misure di lunghezza, superficie, volume e peso. Misure di archi e d'angoli. Misura del tempo.

A. Introduzione.

Consultando le antiche unità di misura d'ogni specie si vede di leggieri, che in buona parte sono riducibili alla base 12; di maniera che per quelle misure, se i calcoli relativi ad esse si effettuano non coll'aritmetica decimale, ma con quella che riposa sulla base dodici, si semplificano di molto, poichè fungono i sottomultipli di dette misure quali frazioni „radicali" delle unità principali, come i sottomultipli del sistema metrico decimale rappresentano frazioni „decimali" dell'unità corrispondente.

I. Così sapendo p. es. che una tesa = 6 piedi; 1 piede = 12 pollici; 1 pollice = 12 linee; 1 linea = 12 punti ecc. esprimendo tali rapporti nel sistema di numerazione duodecimale, s'avrebbe semplicemente:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ tesa} = \text{piedi } 6\\ 1\text{ piede} = \text{tese } 0{,}2\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}1\text{ piede} = \text{pollici } 10\\ 1\text{ poll.} = \text{piedi } 0{,}1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}1\text{ poll.} = \text{linee } 10\\ 1\text{ linea} = \text{poll. } 0{,}1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}1\text{ linea} = \text{punti } 10\\ 1\text{ punto} = \text{linee } 0{,}1\end{array}\right\}$$

II. Passando poi alle misure di superficie s'avrebbe p. es. 1 tesa^2 = 36 piedi^2; 1 piede^2 = 144 pollici^2; 1 pollice^2 = 144 linee^2; 1 linea^2 = 144 punti^2 ecc. e quindi esprimendo tali rapporti nel sistema duodecimale s'avrebbe:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ tesa}^2 = \text{piedi}^2\ 30\\ 1\text{ piede}^2 = \text{tese}^2\ 0{,}04\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}1\text{ piede}^2 = \text{pollici}^2\ 100\\ 1\text{ pollice}^2 = \text{piedi}^2\ 0{,}01\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}1\text{ pollice}^2 = \text{linee}^2\ 100\\ 1\text{ linea}^2 = \text{poll.}^2\ 0{,}01\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ linea} = \text{punti}^2\ 100\\ 1\text{ punto} = \text{linee}^2\ 0{,}01\end{array}\right\}$$

III. Per le misure di volume s'avrebbe analogamente 1 tesa^3 = 216 piedi^3; 1 piede^3 = 1728 pollici^3; 1 pollice^3 = 1728 linee^3; 1 linea^3 = 1728 punti^3; onde passando alla numerazione duodecimale scritta s'avrebbe:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ tesa}^3 = \text{piedi}^3\ 160\\ 1\text{ piede} = \text{tese}^3\ 0{,}008\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}1\text{ piede}^3 = \text{pollici}^3\ 1000\\ 1\text{ pollice}^3 = \text{piedi}^3\ 0{,}001\end{array}\right\}\begin{array}{l}1\text{ pollice}^3 = \text{linee}^3\ 1000\\ 1\text{ linea}^3 = \text{pollici}^3\ 0{,}001\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ linea}^3 = \text{punti}^3\ 1000\\ 1\text{ punto}^3 = \text{linee}^3\ 0{,}001\end{array}\right\}$$

IV. Per le misure di peso sapendo che 1 libbra = 12 once; 1 oncia = 24 denari; 1 denaro = 24 grani; si passerebbe facilmente alla numerazione duodecimale scritta colle seguenti relazioni:

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ libbra} = \text{oncie } 10\\ 1\text{ oncia} = \text{libbre } 0{,}1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}1\text{ oncia} = \text{denari } 20\\ 1\text{ denaro} = \text{oncie } 0{,}06\end{array}\right\}\begin{array}{l}1\text{ denaro} = \text{grani } 20\\ 1\text{ grano} = \text{denari } 0{,}06\end{array}$$

Premesse tali considerazioni noi vediamo facilmente, come al calcolo di numeri complessi formati da unità principali e secondarie simili alle precedenti, si possa sostituire nel sistema duodecimale con molta opportunità il calcolo dei numeri radicali, nella stessa guisa, come nell'aritmetica comune il calcolo delle misure metrico-decimali si riduce al calcolo delle frazioni decimali.

B. Addizione.

Esempio I. Si trovi la somma delle seguenti lunghezze:

5 tese, 4 piedi + 5 piedi, 9 linee + 6 tese, 3 piedi 5 pollici, 9 linee

5 tese,	4 piedi,							= piedi	2a
		5	id.			9 linee		= id.	5,09
6 id.	3	id.	5 poll.,			9	id.	= id.	33,59

Somma = (13 tese, 0 piedi, 6 poll., 6 linee)$_{10}$ = (piedi 66,66)$_{12}$

Somma = piedi 66,66 = tese 11, piedi 0, pollici 6, linee 6
e scritta in base dieci = tese 13, piedi 0, pollici 6, linee 6

Esempio II. Si sommino i seguenti numeri esprimenti misure di peso:
7 libbre, 8 once, 5 denari, 9 grani + 2 once, 7 grani + 9 libbre, 8 denari + 6 libbre, 5 once, 7 denari, 4 grani

7 libbre,	8 once,		5 denari,		9 grani			= libbre	7,82646
		2	id.			7	id.	= id.	0,20036
9	id.			8	id.			= id.	9,04000
6	id.	5	id.	7	id.	4	id.	= id.	6,53620

Somma (23 libbre, 3 once, 20 denari, 20 grani)$_{10}$ = (libbre 1b,3a0a0)$_{12}$

Somma = libbre 1b,3a0a0 = libbre 1b, once 3, denari 18, grani 18
e scritta in base dieci = libbre 23, once 3, denari 20, grani 20

Esempio III. Si effettui la seguente addizione, in cui i numeri dati s'intendono scritti in base decimale:

5 giorni, 9 ore, 45 min. + 13 g., 17 ore, 50 min. + 27 g., 22 ore, 40 min.

Si osservino i seguenti rapporti:

$1^g = (20^h)_{12}$; $1^h = (50')_{12}$; $(45')_{10} = (0^h,9)_{12} = (0^g,046)_{12}$
$1^h = (0^g,06)_{12}$; $1' = (0^h,0\dot{2}49\dot{7})_{12}$; $(50')_{10} = (0^h,a)_{12} = (0^g,050)_{12}$
$(40')_{10} = (0^h,8)_{12} = (0^g,04)_{12}$; essendo infatti $(0,9 \times 0,06 = 0,046)_{12}$;
$(15')_{10} = (0^h,3)_{12} = (0^g,016)_{12}$; $(0,a \times 0,06 = 0,050)_{12}$; $(0,8 \times 0,06 = 0,040)_{12}$

Risoluzione:

5^g, 9^h, $45'$	=	5^g,4a6
13^g, 17^h, $50'$	=	11^g,8b0
27^g, 22^h, $40'$	=	23^g,b40
(47^g, 2^h, $15')_{10}$	=	$(3b^g,116)_{12}$

Quindi la somma cercata ammonta a $3b^g$, 116 = = $3b^g$, 2^h, 13', e scritta invece in base dieci essa equivale a 47^g, 2^h, 15'

Esempio IV. Determinare la somma degli angoli seguenti scritti in base dieci:
$75^\circ 50' 5'' + 82^\circ 0' 15' + 96^\circ 45' 30'' + 105^\circ 24' 10''$, osservando i seguenti rapporti:

$1' = (0^\circ,0\dot{2}49\dot{7})_{12}$	$1'' = (0',0\dot{2}49\dot{7})_{12}$	$= (0^\circ,000\dot{5}915343\dot{a})_{12}$
$(50')_{10} = (0^\circ,a)_{12}$	$(5'')_{10} = 0',1$	$= (0^\circ,00\dot{2}49\dot{7})_{12}$
$(45')_{10} = (0^\circ,9)_{12}$	$(10'')_{10} = 0',2$	$= (0^\circ,00\dot{4}83\dot{2})_{12}$
$(24')_{10} = (0^\circ,\dot{4}97\dot{2})_{12}$	$(15'')_{10} = 0',3$	$= (0^\circ,00\dot{7}24\dot{9})_{12}$
$(10')_{10} = (0^\circ,2)_{12}$	$(30'')_{10} = 0',6$	$= (0^\circ,01\dot{2}49\dot{7})_{12}$
$(14')_{10} = (0^\circ,2\dot{9}72\dot{4})_{12}$	$(45'')_{10} = 0',9$	$= (0^\circ,01\dot{9}72\dot{4})_{12}$

Quindi avremo:

$$\left.\begin{array}{rcl} 75^0\ 50'\ 5'' & = & 63^0{,}a0\dot{2}49\dot{7} \\ 82^0\ \ 0'\ 15'' & = & 6a^0{,}00\dot{7}24\dot{9} \\ 96^0\ 45'\ 30'' & = & 80^0{,}91\dot{2}49\dot{7} \\ 105^0\ 24'\ 10'' & = & 89^0{,}49\dot{b}a7\dot{b} \\ \hline (360^0\ \ 0'\ \ 0'')_{10} & = & (25b^0{,}bbb\dot{a}7b\dot{a})_{12} \end{array}\right\}$$

La somma richiesta è quindi: $25b^0{,}bbb\dot{a}7b\dot{a} \doteq 260^0$*) a meno di $(0^0{,}0002)_{12}$ ed in base dieci $= 360^0$ a meno di $\left(\frac{2}{12^4}\right)^0 = \left(\frac{1}{10368}\right)^0 \doteq \frac{1''}{3}$

Esempio V. Calcolare il valore complessivo dei seguenti importi di danaro, scritti in base dieci: Lire toscane 3, S. 5, Den. 8, + L. 4, S. 15, D. 4 + L. 6, S. 10, D. 9; sapendo che L. 1 = $(\text{S. } 18)_{12}$; S. 1 = $(\text{D. } 10)_{12}$, per cui si ha ancora:

$$\left.\begin{array}{l} 5\ \text{S.} = (\text{L. } 0{,}3)_{12} \\ 1\ \text{S.} = (\text{L. } 0{,}0\dot{7}24\dot{9})_{12} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4\ \text{S.} = (\text{L. } 0{,}\dot{2}49\dot{7})_{12} \\ 1\ \text{D.} = (\text{L. } 0{,}00\dot{7}24\dot{9})_{12} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\ \text{S.} + 1\ \text{D.} = (\text{L. } 0{,}07\dot{9}72\dot{4})_{12} \\ \text{ecc. ecc.} \end{array}$$

Risoluzione:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{L. } 3, \text{S. } 5, \text{D. } 8 & = & \text{L. } 3{,}3\dot{4}97\dot{2} \\ \text{L. } 4, \text{S. } 15, \text{D. } 4 & = & \text{L. } 4{,}9\dot{2}49\dot{7} \\ \text{L. } 6, \text{S. } 10, \text{D. } 9 & = & \text{L. } 6{,}6\dot{5}49\dot{7} \\ \hline \text{Somma} = (\text{L. } 14, \text{S. } 11, \text{D. } 9)_{10} & = & (\text{L. } 12{,}70\dot{7}24\dot{9})_{12} \end{array}\right\}$$

La somma richiesta è quindi uguale a L. $12{,}70\dot{7}24\dot{9}$ = = L. 12,70 D. 1, = L. 12, S. b, D. 9 e scritta in base dieci = L. 14, S. 11, D. 9

infatti abbiamo: S. 18 $\times$ 0,7 = S. b,8 = S. b + D. 8, da cui la trasformazione quì sopra.

C. Sottrazione.

Esempio I. Quale è la differenza delle seguenti 2 lunghezze, scritte in base dieci: t. 13, po. 6, l. 6 e t. 6, p. 3, po. 5, l. 9. Ricorrendo ai rapporti più volte accennati avremo:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{t. } 13, \text{p. } 0, \text{po. } 6, \text{l. } 6 & = & \text{piedi } 66{,}66 \\ \text{t. } 6, \text{p. } 3, \text{po. } 5, \text{l. } 9 & = & \text{id. } 33{,}59 \\ \hline \text{Diff.} = \text{t. } 6, \text{p. } 3, \text{po. } 0, \text{l. } 9 & = & \text{piedi } 33{,}09 \end{array}\right\}$$

Diff. = p. 33,09 = t. 6, p. 3, l. 9, e scritta in base dieci = t. 6, p. 3, po. 0, l. 9

Esempio II. Si sottraggano i seguenti numeri complessi esprimenti misure di peso, scritti in base dieci, ricordando sempre i rapporti citati: Da libbre 23, on. 3, d. 20, g. 20, si sottraggano l. 7, o. 10, d. 5, g. 16.

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{l. } 23, \text{o. } 3, \text{d. } 20, \text{g. } 20 & = & \text{libbre } 1b{,}3a0a0 \\ \text{l. } 7, \text{o. } 10, \text{d. } 5, \text{g. } 16 & = & \text{id. } 7{,}a2680 \\ \hline \text{Diff.} = \text{l. } 15, \text{o. } 5, \text{d. } 15, \text{g. } 4 & = & \text{libbre } 13{,}57620 \end{array}\right\}$$

Diff. = l. 13,57620 = l. 13, o. 5, d. 13, g. 4 e scritta in base dieci = = libbre 15, o. 5, d. 15, g. 4

Esempio III. Dal numero complesso 47 giorni, 2 ore, 15 min. si levi il numero: 41 g., 16 ore, 30 min. Questi numeri s'intendono scritti in base dieci e si vuol calcolare la differenza in base dodici:

---

*) Il segno $\doteq$ vale: „press'a poco uguale".

g. 47, o. 2, m. 15 = g. 3b,116; infatti
g. 41, o. 16, m. 30 = g. 35,830

o. 1 = g. 0,06
o. 2 = g. 0,1; m. 15 = o. 0,3 = g. 0,016
o. 16 = g. 0,8; m. 30 = o. 0,6 = g. 0,030

Diff. g. 5, o. 9, m. 45 = g. 5,4a6 = g. 5, o. 9,9 = g. 5, o. 9, m. 39 = Diff. scritta in base dodici, e scritta in base decimale la diff. = g. 5, o. 9, m. 45.

Esempio IV. Trovare il supplemento dell'angolo A = 75° 45′ 15″, supponendolo scritto in base dieci.

π = 180° 0′ 0″ = 130°,000000
A = 75° 45′ 15″ = 63°,907249
π — A = 104° 14′ 45″ = 88°,2b4972 Suppl. di A = 88°,2b4972 = 88° 12′ 39″

Infatti sappiamo da quanto precede essere 0°,2972 = 12′
e d'altronde 0°,0197 24 = 0′ 39″
sommando si ha quindi 0°,2b4972 = 12′ 39″ q. e. d.

Ed esprimendo il risultato in base dieci si ha π — A = 104° 14′ 45″.

Esempio V. Un tale deve Lire tosc. 14, S. 11, D. 9, ne paga L. 3, S. 5, D. 8; quanto deve ancora?

L. 14, S. 11, D. 9 = L. 12,707249
L. 3, S. 5, D. 8 = L. 3,349724
Resto L. 11, S. 6, D. 1 = L. b,379724

Deve ancora L. b,379724 = L. b, S. 6, D. 1
Infatti S. 5, = L. 0,3
S. 1, D. 1 = L. 0,079724
Sommando si ha S. 6, D. 1 = L. 0,379724

Quindi quel tale deve ancora il seguente importo, scritto in base dieci: L. 11, S. 6, D. 1.

D. Moltiplicazione.

Esempio I. Un rettangolo ha per base la lunghezza di t. 5, p. 4, po. 11, l. 9 e per altezza un tratto rettilineo lungo t. 2, p. 5, po. 10, l. 11, queste dimensioni s'intendono scritto in base dieci; trovarne l'area.

b = t. 5, p. 4, po. 11, l. 9 = p. 2a,b9
h = t. 2, p. 5, po. 10, l. 11 = p. 15,ab
A = b.h = p^2(2a,b9 × 15,ab) = $p^2$442,5733

I calcoli fatti quì appresso riposano sopra i rapporti stabiliti in proposito nell'introduzione a questo capitolo

2a,b9
15,ab
28093
251a6
126a9
3ab9
p.² 442,5733

p.² 441 =
= t.² 442 : 30 = t.² 15, p.² 12
A = t.² 15, p.² 12, po.² 57, l.² 33
e scritto in base dieci si ha
A = t.² 17, p.² 14, po.² 67, l.² 39

Esempio II. Un parallelepipedo ha per base un rettangolo la cui area è di t.² 17, p.² 18, po.² 68, l.² 39 e l'altezza del corpo è di t. 5, p. 4, po. 11, l. 9, (dimensioni espresse in base dieci), trovarne il volume.

A = t.² 17, p.² 14, po.² 67, l.² 39 = p.² 442,5733
H = t. 5, p. 4, po. 11, l. 9 = p. 2a,b9

V = A. H = p.³ (442,5733 × × 2a,b9) = p.² 10821,370b23

```
  442,5733
     2a,b9
  ---------
  331a2553
 3ba317b9
37608086
884b266
---------
10821,370b23
```

p.³ 10821 : 160 = t.³ 85, p.³ 81;

```
100
 82
 76
 81
```

dunque si ha V = t.³ 85, p.³ 81, po.³ 370, l.³ b23 e volendo scrivere questo risultato in base dieci si ha V = t.³ 101, p.³ 97, po.³ 516, l.² 1611

Esempio III. Qual'è la somma da distribuirsi fra 17 persone in modo che ciascuna abbia lire toscane 24, soldi 5, denari 6. (I dati sono scritti in base dieci; il calcolo lo si faccia in base dodici).

(L. 24, S. 5, D. 6)$_{10}$ = (L. 20,337249)$_{12}$ ≐ *) L. 20,33725
(17)$_{10}$ = (15)$_{12}$ 15

L. 412, S. 13, D. 6

a145bb3
20337249
L. 2a4,81240

Il valore distribuito ammonta a L. (2a4,812407)$_{12}$ ≐ L. 2a4, S. 11, D. 6.
Il quale importo scritto in base dieci vale L. 412, S. 13, D. 6.

Esempio IV. Quanto valgono tese² 17 e p.² 18 di terreno, se 1 tesa quadr. vale Lire 49, S. 10. (Numeri dati in base dieci; calcolo in base dodici)

(Lire 49, S. 10)$_{10}$ = (L. 41,6)$_{12}$
(t.² 17, p.² 18)$_{10}$ = (t.² 15,6)$_{12}$

= (L. 41,6 × 15,6)$_{12}$ = (L. 602,3)$_{12}$ Prezzo del terreno = e scritto in base dieci si ha Prezzo L. 866, S. 5.

Verifica

```
  41,6        49,5
  15,6        17,5
  ----        ----
  2090        2475
 1876        3465
 416         495
-----       -----
```

(L. 602,30)$_{12}$ = (L. 866,25)$_{10}$ = (L. 866, S. 5)$_{10}$

Anche quì si è ricorso ai rapporti noti, pei quali p.² 36 = t.² 1; S. 20 = L. 1.

*) Il simbolo ≐ vale „press'a poco uguale".

E. Divisione.

Esempio I. Un rettangolo, la cui area è di t.^{2} 17, p.^{2} 14, po.^{2} 67, l.^{2} 39 e la sua altezza di t. 2, p. 5, po. 10, l. 11; si chiede la misura della base, supponendo i dati scritti in base dieci, e volendosi eseguire i calcoli in base dodici.

$$\left.\begin{array}{l} A = (t.^2 17,\ p.^2 14,\ po.^2 67,\ l.^2 39)_{10} = (t.^2 15,\ p.^2 12,\ po.^2 57,\ l.^2 33)_{12} = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = p.^2 442{,}5733 \\ H = (t.\ \ 2,\ p.\ \ 5,\ po.\ \ 10,\ l.\ \ 11) \ = (t.\ \ 2,\ p.\ \ 5,\ po.\ \ a,\ l.\ \ b)_{12} = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = p.\ 15{,}ab \end{array}\right\} B = A : H$$

442,5733 : 15,ab = 2a,b9;

```
2b9a
-----
14477
12b12
-----
 15653
 14501
 -----
  11523
  11523
  -----
  00000
```

Quindi la misura della base del rettangolo dato scritta nel sistema numerico duodecimale è di p. 2a,b9 = t. 5, p. 2, po. b, l. 9; e volendo il risultato scritto in base dieci si ottiene B = t. 5, p. 2, po. 11, l. 9; il che forma una verifica o riprova alla soluzione dell'esempio I. relativo alla moltiplicazione dei numeri complessi.

Esempio II. Un parallelepipedo ha per base un rettangolo la cui area è di t.^{2} 17, p.^{2} 14, po.^{2} 67, l.^{2} 39 ed il suo volume è dato dal numero complesso t.^{3} 101, p.^{3} 97, po.^{3} 516, l.^{3} 1611; calcolare l'altezza del corpo ricorrendo al sistema a base dodici, benchè i dati sieno espressi in base dieci.

$$A = (t.^2 17,\ p.^2 14,\ po.^2 67,\ l.^2 39)_{10} = (t.^2 15,\ p.^2 12,\ po.^2 57,\ l.^2 33)_{12} = (p.^2 442{,}5733)_{12}$$

Infatti:

$t.^2 (17)_{10} = t. (15)_{12}$
$p.^2 (14)_{10} = p.^2 (12)_{12}$
$(15 \times 30 + 12 = 442)_{12}$
$po.^2 (67)_{10} = po.^2 (57)_{12} = p.^2\ 0{,}57$
$l.^2 (39)_{10} = l.^2 (33)_{12} = p.^2\ 0{,}0033$

$$V = (t.^3 101,\ p.^3 97,\ po.^3 516,\ l.^3 1611)_{10} = (t.^3 85,\ p.^3 81,\ po.^2 370,\ l.^3 b23)_{12} = (p.^3\ 10821{,}370b23)_{12}$$

Infatti:

$t.^3 (101)_{10} = t.^3 (85)_{12}$
$p.^3 (97)_{10} = p.^3 (91)_{12}$
$(85 \times 160 + 81 = 10821)_{12}$
$po.^3 (516)_{10} = po.^3 (370)_{12} = p.^3\ 0{,}370$
$l.^3 (1611)_{10} = l.^3 (b23)_{12} = p.^3\ 0{,}000b23$

Soluzione:

10821,370b23 : 442,5733 = 2a,b9

```
884b266
-------
3b92106b
37608086
--------
 4314ba52
 3ba317b9
 --------
  331a2553
  331a2553
  --------
  00000000
```

La misura dell'altezza del parallelepipedo dato, scritta come risultò in base dodici è di p. 2a,b9 = t. 5, p. 2, po. b, l. 9; e volendo tale misura risultante espressa piuttosto in base dieci si ottiene H = t. 5, p. 2, po. 11, l. 9, il quale risultato serve da controllo alla soluzione del problema proposto nell'esempio II. relativo alla moltiplicazione dei numeri complessi.

Esempio III. Fra 17 persone voglionsi distribuire L. 412, S. 13, D. 6 in parti eguali; si domanda quanto toccherà a ciascuno (i numeri dati sono espressi come sempre in base dieci, la soluzione la cercheremo ancora col calcolo in base dodici).

$(\text{L. } 412, \text{S. } 13, \text{D. } 6)_{10} = (\text{L. } 2a4, \text{S. } 11, \text{D. } 6)_{12} \doteq (\text{L. } 2a4{,}8124072)_{12}$; $(17)_{10} = (15)_{12}$ quindi si ha:

2a4,8124072 : 15 = 20,3372432
0048
51
a2
34
60
47
42

L'importo che toccherà a ciascuna persona scritto in base dodici ammonta a L. 20,3372432, valore approssimativamente eguale a quello dato nell'esempio III. delle moltiplicazioni dei numeri complessi quale somma individuale da distribuirsi, che scritta in base dieci ascende a L. 24, S. 5, D. 6.

Esempio IV. Se un terreno di t.^{2} 17, p.^{2} 18 vale L. 866, S. 5, si domanda quanto varrà esso per tesa quadrata (anche quì i dati intendonsi in base dieci, ed il calcolo viene eseguito in base dodici).

$(\text{t.}^2\ 17, \text{p.}^2\ 18)_{10} = (\text{t.}^2\ 15{,}6)_{12}$
$(\text{L. } 866, \text{S. } 5)_{10} = (\text{L. } 602{,}3)_{12}$ } Onde il prezzo unitario di quell'appezzamento di terreno lo si ricaverà quale quoziente della seguente divisione:

602,3 : 15,6 = 41,6
5a0
223
156
890
890
0

Quindi il valore di quel terreno per tesa quadrata è di L. 41,6 (in base dodici) che corrisponde scritto in base dieci a L. 49, S. 10; e questo risultato può servire da verifica di quello ottenuto nella soluzione del problema proposto coll'esempio IV. delle moltiplicazioni dei numeri complessi.

F. Osservazioni sui calcoli fatti negli esempî precedenti coi numeri complessi.

Dagli esempî sin quì trattati emerge bensì che il sistema duodecimale è in molti casi atto a semplificare i calcoli coi numeri complessi, ma s'è veduto altresì che in alcuni casi dobbiamo affrontare delle frazioni periodiche; ciò si verifica precisamente in quei casi, in cui dell'unità principale d'un certo sistema di misure si formano dei sottomultipli non solo secondo i fattori **2** e **3** della base dodici, ma anche secondo altri fattori primi e precipuamente v'incontriamo in allora anche il fattore 5; per modo che in quei casi, volendo ridurre il calcolo dei numeri complessi a quello dei numeri radicali, bisognerebbe adottare un sistema di numerazione nella cui base entrassero possibilmente tutti tre questi divisori 2, 3 e 5. Per molti riguardi si raccomanderebbe a tal uopo il sistema sessagesimale (a base sessanta); ma è facile vedere che in tal caso s'avrebbe a combattere con un altro inconveniente e sarebbe

la necessità d'introdurre cinquanta nuove cifre pei numeri compresi dal dieci al cinquantanove. Per ovviare almeno in parte a tale difficoltà potremo adottare p. es. il sistema trigesimale (a base trenta) assumendo i seguenti simboli: a = 10, b = 11, c = 12, d = 13, e = 14, f = 15, g = 16, h = 17, i = 18, l = 19, m = 20, n = 21, p = 22, q = 23, r = 24; s = 25; t = 26; u = 27; v = 28; z = 29.

Servendoci adunque del calcolo trigesimale, proviamoci ora a risolvere quelli tra i problemi precedenti che han dato luogo a frazioni periodiche.

XXI. Problemi sui numeri complessi, coll'uso del sistema numerico trigesimale.

A. Addizione.

Esempio III. Si effettui la seguente addizione, in cui i numeri dati s'intendono scritti in base decimale 5 g., 9 o., 45 min., + 13 g., 17 o., 50 m. + 27 g., 22 o., 40 m.;

Osservando che 1 giorno = ore r avremo quindi:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ ora} = \left(\frac{1}{r} = \frac{1}{2^3.3} = \frac{3^2.2^3}{2^3.3^3.5^3} = 0{,}17f\right) \text{giorni} \\ \frac{1}{2} \text{ ora} = 0{,}0ipf \text{ giorni}, \ \frac{1}{3} \text{ ora} = 0{,}0cf \text{ giorni} \\ \frac{1}{4} \text{ ora} = 0{,}09b7f \text{ id.} \ \ \frac{1}{6} \text{ ora} = 0{,}067f \text{ id.} \end{array}\right.$$

osservando poi che 1 ora = min. 20

avremo pure 1 min. = ore $\frac{1}{20}$ = ore $\frac{1}{2^2.3.5}$ = ore $\frac{3.5}{2^2.3^2.5^2}$ = ore 0,0f

$$\left.\begin{array}{rl} 5 \text{ g., } 9 \text{ ore, } 45 \text{ min.} = & \text{g. } (5{,}b7f + 0{,}0v3pf) = \text{giorni } 5{,}c5ipf \\ 13 \text{ g., } 17 \text{ ore, } 50 \text{ min.} = & \text{g. } (d{,}n7f + 0{,}117f) = \text{id. } d{,}d8pf \\ 27 \text{ g., } 22 \text{ ore, } 40 \text{ min.} = & \text{g. } (u{,}uf0 + 0{,}0s0) = \text{id. } u{,}va00 \\ \hline \text{Somma } 47 \text{ g., } 2 \text{ ore, } 15 \text{ min.} = & \text{g. } (1h{,}000 + 0{,}2rb7f) = \text{giorni } 1h{,}2rb7f \end{array}\right\}$$

Somma = giorni 1h,2rb7f = giorni 1 h, ore 2,7f = giorni 1h, ore 2, min. f, e scritta in base dieci, giorni 47, ore 2, min. 15.

Infatti

$$\begin{array}{r|l} 0{,}2rb7f & 0{,}17f = 2{,}7f \\ 2f0 & \\ \hline 9b7 & \\ 8pf & \\ \hline ipf & \\ ipf & \\ \hline 000 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}7f : 0{,}0f = f \\ 7f \\ \hline 00 \end{array}$$

Esempio IV. Determinare la somma degli angoli seguenti scritti in base dieci: 75°50′5″ + 82°0′15″ + 96°45′30″ + 105°24′10″ osservando i seguenti rapporti

$$\begin{array}{rl|rl} 1^\circ = 20' & & 1' = 20'' & \\ 1' = 0^\circ{,}0f & & 1'' = 0'{,}0f = 0^\circ{,}007f & \\ \text{quindi } (30')_{10} = (10')_{30} = & 0^\circ{,}f & \text{quindi } (30'')_{10} = (10'')_{30} = & 0'{,}f = 0^\circ{,}07f \\ (15')_{10} = (f')_{30} = & 0^\circ{,}7f & (15'')_{10} = (f'')_{30} = & 0'{,}7f = 0^\circ{,}03pf \\ (6')_{10} = (6')_{30} = & 0^\circ{,}3 & (6'')_{10} = (6'')_{30} = & 0'{,}3 = 0^\circ{,}01f \\ (5')_{10} = (5')_{30} = & 0^\circ{,}2f & (5'')_{10} = (5'')_{30} = & 0'{,}2f = 0^\circ{,}017f \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rl}
75^0\,50'\;\;5'' & = 2f^0{,}s0 + 0^0{,}017f = 2f^0{,}s17f \\
82^0\;\;0'\,15'' & = 2p^0{,}00 + 0^0{,}03pf = 2p^0{,}03pf \\
96^0\,45'\,30'' & = 36^0{,}pf + 0^0{,}07f0 = 36^0{,}ppf0 \\
105^0\,24'\,10'' & = 3f^0{,}c0 + 0^0{,}02f0 = 3f^0{,}c2f0 \\
\hline
\text{Somma} = (360^0\;\;0'\;\;0'')_{10} & = bz^0{,}zf + 0^0{,}0f00 = c0^0{,}0000
\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Somma} = c0^0{,}0000 \text{ e} \\ \text{scritta in base dieci} = \\ = 360^0\;0'\;0''\end{array}$$

Esempio V. Calcolare il valore complessivo dei seguenti importi di danaro dati in monete e scritti in base dieci: Lire toscane 3, Soldi 5, Den. 8, + L. 4, S. 15, D. 4 + L. 6, S. 10, D. 9; sapendo che

1 L. = S. **m**

per cui 1 S. $= L\frac{1}{m} = L.\frac{1}{2^2.5} = L.\frac{3^2.5}{2^2.3^2.5^2} =$ L. 0,1f

quindi 5 S. = L. 0,7f; **a** S = L. 0,f0; **f** S. = L. 0,pf;

1 S. = D. **c**

per cui 1 D. $= S.\frac{1}{c} = S.\frac{1}{2^2.3} = S.\frac{3.5^2}{2^2.3^2.5^2} =$ S. 0,2f = L. 0,03pf;
poichè 2f × 1f = 3pf;

quindi 4 D. = L. 0,0f00; 8 D. = L. 0,1; 3 D. = L. 0,0b7f; 6 D. = L. 0,0pf0;
9 D. = L. 0,13pf;

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Lire } 3, \text{ S. } 5, \text{ Den. } 8 & = \text{L. } (3{,}7f + 0{,}1) & = \text{L. } 3{,}8f \\
\text{Lire } 4, \text{ S. } 15, \text{ Den. } 4 & = \text{L. } (4{,}pf + 0{,}0f) & = \text{L. } 4{,}q0 \\
\text{Lire } 6, \text{ S. } 10, \text{ Den. } 9 & = \text{L. } (6{,}f0 + 0{,}13pf) & = \text{L. } 6{,}g3pf \\
\hline
\text{Somma} = (\text{Lire } 14, \text{ S. } 11, \text{ Den. } 9)_{10} & = \text{L. } (e{,}f0 + 0{,}2ipf) & = \text{L. } e{,}hipf
\end{array}\right\}$$

e poichè 0,hipf : 0,1f = b,pf; 0,pf : 0,2f = 9

s'avrà la somma = L. e,hipf = L. **e** S. **b,pf** = L. **e** S. **b** D. **9**

e in base dieci Somma = L. **14**, S. **11**, D. **9**.

B. Sottrazione.

Esempio III. Dal numero complesso 47 giorni 2 ore 15 min. si levi il numero 41 g., 16 ore, 30 min. Questi numeri s'intendono scritti in base dieci e si vuol calcolare la differenza in base trenta

g. 47, ore 2, min. 15 = 1h,2rb7f giorni (vedi esempio III. delle addizioni somma risultante)

g. 41, ore 16, min. 30 = 1b,mipf0 giorni (vedi esempio III. delle addizioni somma delle ultime due poste)

Diff. = (g. 5, ore 9, min. 15)$_{10}$ = 5,c5ipf giorni (vedi esempio III. delle addizioni ammontare della prima posta)

Differenza = giorni 5,c5ipf, in base trenta ossia

id = giorni 5, ore 9, min f, ed in base dieci: Diff. = giorni 5, ore 9, min 15.

Esempio IV. Trovare la misura del supplemento dell'angolo A = 75° 45′ 15″ (scritto in base dieci)

$$\pi = 180^0\ 0'\ 0'' = 5z^0,00 + 1^0,0000 = 60^0,0000$$
$$A = 75^0\ 45'\ 15'' = 2f^0,pf + 0^0,03pf = 2f^0,pipf$$

Suppl. $= \pi - A = (104^0\ 14'\ 45'')_{10} = 3d^0,7f + 0^0,zt7f = 3e^0,7b7f$

vedi i rapporti scritti all'esempio IV. delle addizioni in base trenta.

Ora si ha $0^0,7b7f = e',pf = e'\ 1f''$

poichè $0,7b7f : 0,0f = e,pf$; $0,pf : 0,0f = 1f$

quindi il supplemento di A sarà $\pi - A = 3e^0,7b7f = 3e^0\ e'\ 1f''$ e scritto invece in base decimale abbiamo: $\pi - A = 104^0\ 14'\ 45''$.

Esempio V. Un tale deve Lire toscane 14, S. 11, D. 9. Ne paga L. 3, S. 5, D. 8, quanto deve ancora?

L. 14, S. 11, D. 9 = L. e,hipf (vedi esempio V, delle addizioni somma risultante)

L. 3, S. 5, D. 8 = L. 3,8f (vedi esempio V, delle addizioni ammontare della prima posta)

Resto = (L. 11, S. 6, D. 1)$_{10}$ = L. b,93pf (vedi esempio V. delle addizioni somma delle ultime due poste)

Infatti 0,93pf : 01f = 6,2f; quindi L. b,93pf = L. **b**, S. **6**, D. **1** essendo D. 1 = S. 0,2f.

Quel tale deve adunque ancora L. b,93pf = Lire **b**, S. **6**, D. **1** e scritto tale importo in base dieci invece Lire **11**, S. **6**, D. **1**.

C. Moltiplicazione.

Esempio III. Qual'è la somma da distribuirsi fra 17 persone in modo che ciascuna abbia lire toscane 24, soldi 5, denari 6 (dati scritti in base dieci, calcolare in base trenta)

(L. 24, S. 5, D. 6)$_{10}$ = L. (r,7f + 0,0pf) = L. r,87f; (17)$_{10}$ = h

Molt. { r,87f / h / dp,m7f } Dunque la somma da ripartire in tutto è di L. dp,m7f = L. dp, S. d,f = L. **dp**, S. **d**, D 6.

essendo 0,m7f : 0,1f = d,f; 0,f : 0,2f = 6

e volendo esprimerla in base dieci si ha quella somma uguale a **L. 412, S. 13, D. 6**

poichè $(dp)_{30} = (13.30 + 22)_{10} = (412)_{10}$.

Esempio IV. Quanto valgono tese^2 17 e p^2 18 di terreno, se 1 tesa quadrata vale Lire 49, S. 10? (Numeri dati in base dieci; calcolo in base trenta)

(L. 49, S. 10)$_{10}$ = L. 11,f
(t.^{2} 17, p.^{2} 18)$_{10}$ = t.^{2} h,f } Prezzo del terreno = (Lire 11,f × h,f)$_{30}$ = (L. vt,7f)$_{30}$ e scritto in base dieci si ha prezzo = **L. 866, S. 5**

Verifica

Molt. { 1,1f / h,f / rpf / v1f } 49,5 / 17,5 / 2475 / 3465 / 495

$(v,t7f)_{30} = (866,25)_{10} = (L.\ 866,\ S.\ 5)_{10}$

$(vt,7f)_{30} = (28.30 + 26 + \frac{225}{900})_{10} = (866\frac{1}{4})_{10}$

Anche quì si è ricorso ai noti rapporti.

D. Divisione.

Esempio III. Fra 17 persone voglionsi distribuire L. 412, S. 13, D. 6 in parti eguali, si domanda quanto toccherà a ciascuno. (I numeri dati sono scritti in base dieci, calcolo in base trenta).

$(L\ 412, S.\ 13, D.\ 6)_{10} = (L.\ dp,m7f)_{30}$ (vedi esempio III. della molt. in base trenta)

$(17)_{10} = (h)_{30}$

$dp,m7f : h = r,87f$; $(L.\ r,87f)_{30} = (L.\ 24, S.\ 5, D.\ 6)_{10}$ (vedi esempio III. della molt. in base trenta)

```
di
---
4m
4g
---
 47
 3z
---
 8f
 8f
---
 00
```

L'importo, che toccherà a ciascuna persona, scritto in base trenta ammonta quindi a L. r,87f, che è precisamente uguale a quello dato nell'esempio III, delle moltiplicazioni, quale somma individuale da distribuirsi, che scritta in base dieci ascende a Lire 24, S. 5, D. 6.

Esempio IV. Se un terreno di t.² 17, p.² 18 vale L. 866 S. 5, se ne domanda il prezzo unitario (cioè per tesa quadrata); i dati s'intendono anche quì scritti in base dieci; calcolo in base trenta.

$(t.^2\ 17, p.^2\ 18)_{10} = (t.^2\ h,f)_{30}$ (vedi esempio IV. delle moltiplicazioni in base trenta)

$(L.\ 866, S.\ 5)_{10} = (L.\ vt,7f)_{30}$ (id. id. id.)

$vt,7f : h,f = 11,f$; $(L.\ 11,f)_{30} = (L.\ 49, S.\ 10)_{10}$ (vedi es. IV delle molt. in base trenta)

```
hf
---
bb7
b2f
---
8pf
8pf
---
000
```

Quindi il valore di quel terreno per tesa quadrata (il suo „prezzo unitario„) è di L. 11,f, il quale risultato può servire a titolo di verifica della soluzione trovata pel problema proposto coll'esempio IV. delle moltiplizioni in base trenta.

Da questi ultimi esempî, nei quali la soluzione fu trovata col sistema numerico trigesimale, risulta adunque infatti, che col suo mezzo si possono evitare tutte quelle frazioni periodiche che hanno origine dal fattore primo 5, che entra a formare i sottomultipli di talune delle unità di misura considerate.

Errata-Corrige.

Pag. 2 Linea 9 di sopra invece di: spezzata (—, che ecc.) leggasi: spezzata (— —, che ecc.).
» 3 » 10 » » s'aggiungano i numeri XIII e XVII e si tolgano i numeri XX e XXI.
» 3 » 21 » » invece di: visto leggasi vista.
» 5 » 12 » » » » divisibile $(b + 1)$ leggasi: divisibile per $(b + 1)$.
» 5 » penultima invece di XXI leggasi XIX.
» 6 » 10 di sopra si legga: $N - R = (a_m - a_0)(b^m - 1) + (a_{m-1} - a_1)(b^{m-1} - b) + (a_{m-2} - a_2)(b^{m-2} - b^2) + \ldots + (a_{m-r} - a_r)(b^{m-r} - b^r)$; ma $(b^p - b^s)$ è ecc.
» 6 Linea 20 di sopra invece di: XII, XV si legga XIV.
» 6 » 27 » » » » $6n + 1$ si legga $(6n \pm 1)$.
» 7 » 5 » » » » V si legga VI.
» 7 S'aggiunga la seguente nota: Nel caso in cui (come a pag. 10 ed 11) N_b ed N_r significano numeri scritti nella medesima maniera in basi diverse, N_b ed N_r sono naturalmente disuguali.
» 8 Linea 13 di sotto invece di f leggasi f^2.
» 23 » 14 » » » » sottriamo leggasi sottraiamo.
» 27 » 16 di sopra » » 426 leggasi 456.
» 33 » 12 di sotto » » 4867 leggasi 4837.
» 36 » 14 » » » » (4339) leggasi $(4339)_{12}$.

INDICE.

	Pag.
Prefazione	1
I. Criterî di divisibilità nei sistemi numerici a base non decimale.	8
Appendice al Capitolo I. Criterî speciali di divisibilità	18
II. Trasformazione delle frazioni ordinarie in radicali	22
III. Generazione delle frazioni radicali finite, periodiche semplici e periodiche miste	ivi
IV. Trasformazione inversa	ivi
V. Metodi rapidi per eseguire in alcuni casi particolari delle Moltiplicazioni e Divisioni	28
VI. Osservazioni generali sul calcolo dei numeri scritti in base b non decimale	30
VII. Complemento aritmetico	33
VIII. Passaggio da un sistema di numerazione ad altro sistema di numerazione	34
IX. Tavola dei quadrati dei primi dodici numeri scritti in diversi sistemi di numerazione	39
X. Tavola dei cubi dei primi dodici numeri scritti in diversi sistemi	40
XI. Tavola dei numeri primi da 1 a 500	41
XII. Osservazioni sulle Tavole precedenti che concernono i quadrati ed i cubi dei numeri ed i numeri primi	ivi
XIII. Decomposizione d'un numero nei suoi fattori primi	46
XIV. Ricerca di tutti i divisori d'un numero. Numero dei divisori	46
XV. Ricerca del minor numero, che abbia un numero dato di divisori	51
XVI. Ricerca del massimo comun divisore a due o più numeri dati	52
XVII. Ricerca del minimo comune multiplo di due o più numeri dati	53
XVIII. Calcolo delle frazioni ordinarie	55
XIX. Prove alle operazioni	57
XX. Calcolo dei numeri complessi nel sistema numerico duodecimale. Misure di lunghezza, superficie, volume e peso. Misure di archi e d'angoli. Misura del tempo:	
A. Introduzione	59
B. Addizione	60
C. Sottrazione	61
D. Moltiplicazione	62
E. Divisione	64
F. Osservazioni sui calcoli fatti negli esempî precedenti coi numeri complessi	65
XXI. Problemi sui numeri complessi, coll'uso del sistema numerico trigesimale:	
A. Addizione	66
B. Sottrazione	67
C. Moltiplicazione	68
D. Divisione	69
Errata-Corrige	70

ALTRE OPERE MATEMATICHE

VENDIBILI PRESSO LA STESSA DITTA EDITRICE.

Prof. L. De Cerebotani, **Distanze, Topografie e Curve ecc.**, [illegible] 80 (mancano). Magonza. . . . . L. [illegible]

id. **Verfahren**, von einem beliebigen Standpunkte aus, Entfernungen zu bestimmen und Curven abzustecken. Berlin. . . . » —.75

id. **Die Cerebotani'schen Messinstrumente.** (Separatabdruck aus dem Wochenblatt für Architekten und Ingenieure). Berlin . . » 1.—

id. **Verschiedene Patentschriften.** (Photogr. Druck der Reichsdruckerei). Berlin . . » 1.75

id. **For persons unversed in mathematical knowledge etc.** Berlin . . . . » 3.—

id. **Il Tele-Topometro**, da un sol punto senza nulla mutare. Verona, 1884. . . . . » —.50

Prof. G. Dr. Frizzo, **L'Aritmetica** per le Scuole ginnasiali, tecniche e normali. III. Ed. . . . . » 1.[illegible]

id. **Trattato di Geometria elementare** per le Scuole ginnasiali, tecniche e normali. III. Ed. . . . » 2.50

id. **Le Regoluze di Maestro Paolo dell'Abbaco**, matematico del secolo XIV. 1882. . . . » 2.—

id. **Nozioni d'aritmetica e sistema metrico** per le scuole elementari inferiori. III. Ed. 1882. . . » —.[illegible]

id. **Nozioni d'aritmetica e sistema metrico** per le scuole elementari superiori. III. Ed. 1883. . . » —.50

Di prossima pubblicazione:

Prof. G. Dr. Frizzo, **Note di matematica.**

id. **L'istruzione secondaria in Italia.**

id. **Saggio di geometria esposta con un nuovo metodo.**

STABILIMENTO M. DRUCKER IN VERONA.